

## МЕТОД BFGS ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ S-ПОДІБНОЇ КРИВОЇ

Розглянуто використання методу BFGS та його проективного варіанта L-BFGS-B для мінімізації нелінійної функції, яка відповідає знаходженню розв'язків системи п'яти нелінійних рівнянь, серед яких три рівняння є інтегральними та залежать від невідомих параметрів підінтегральних функцій і невідомих верхніх границь для визначених інтегралів. Ця система відповідає задачі побудови S-подібної кривої, яка проходить через дві задані точки із заданими кутами нахилу дотичних у них та забезпечує заданий кут нахилу дотичної у проміжній точці із заданою абсцисою. Показано, що метод BFGS є ефективним, якщо стартова точка вибирається в околі точки мінімуму, де функція, що мінімізується, достатньо точно апроксимується опуклою квадратичною функцією.

**Ключові слова:** S-подібна крива, квадратична кривина, задача нелінійного програмування, r-алгоритм, квазіньютонівські методи, метод BFGS.

### Вступ

Метод BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) відомий як один із ефективних методів квазіньютонівського типу [3; 6], в яких, на відміну від ньютонівських методів, гессіан функції обчислюється наближено за допомогою градієнтів у точках ітераційного процесу. Для строго опуклої квадратичної функції від  $n$  змінних методи квазіньютонівського типу гарантують збіжність до точки мінімуму не більше ніж за  $n$  ітерацій, де кожна ітерація вимагає малорангових корекцій симетричної  $n \times n$ -матриці  $H$  та реалізується за  $O(n^2)$  арифметичних операцій. На останній ітерації методу матриця  $H$  із точністю до постійного множника збігається з матрицею, оберненою до гессіана квадратичної функції.

Програмні реалізації методу BFGS та його проективного варіанта L-BFGS-B [5] активно використовують для мінімізації гладких функцій. Вони є ефективними, якщо стартова точка вибирається в тому околі точки мінімуму, де функція, що мінімізується, достатньо точно апроксимується опуклою квадратичною функцією.

У статті розглянемо застосування методів BFGS та L-BFGS-B для мінімізації нелінійної гладкої функції, яка відповідає знаходженню розв'язків системи п'яти нелінійних рівнянь [4], де три рівняння є інтегральними (залежать від невідомих параметрів підінтегральних функцій і невідомих верхніх границь для визначеного інтегралу). Ця система відповідає задачі побудови S-подібної кривої у натуральній параметризації [1], яка проходить через дві задані точки із заданими кутами нахилу дотичних у них та забезпечує заданий кут нахилу дотичної в проміжній точці із заданою абсцисою.

Матеріал статті викладено в такому порядку. У розділі 1 описано систему п'яти нелінійних рівнянь та наведено її властивості, пов'язані з існуванням багатьох розв'язків. У розділі 2 наведено опис оптимізаційної задачі з негладкою цільовою функцією та лінійними обмеженнями, глобальні мінімуми якої відповідають розв'язкам системи нелінійних рівнянь, та застосування модифікації r-алгоритму для знаходження глобальних мінімумів оптимізаційної задачі. У розділі 3 описано результати застосування методів BFGS та L-BFGS-B для знаходження глобальних мінімумів гладких функцій, які відповідають знаходженню розв'язків системи нелінійних рівнянь для S-подібних кривих.

### 1. Система нелінійних рівнянь та її властивості

Задача побудови плоскої кривої (в натуральній параметризації з квадратичним графіком кривини), яка проходить через дві точки  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$  із заданими  $\varphi_1, \varphi_2$  – кутами нахилу дотичних у них та забезпечує  $\varphi_p$  – заданий кут нахилу дотичної в точці  $(x_p, y_p)$  із заданою абсцисою  $x_p$ , описується за допомогою системи із п'яти нелінійних рівнянь [4]:

$$x_2 = x_1 + \int_0^S \cos \left( \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (1)$$

$$y_2 = y_1 + \int_0^S \sin \left( \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (2)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS, \quad (3)$$

$$x_p = x_1 + \int_0^{s_p} \cos \left( \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds, \quad (4)$$

$$\varphi_p = \varphi_1 + \frac{as_p^3}{3} + \frac{bs_p^2}{2} + cs_p. \quad (5)$$

Система (1)–(5) має п'ять невідомих:  $a, b, c$  – три коефіцієнти квадратичної функції  $as^2 + bs + c$ ,  $S$  – довжина кривої від точки  $(x_1, y_1)$  до точки  $(x_2, y_2)$ ,  $s_p$  – довжина ділянки кривої від точки  $(x_1, y_1)$  до точки  $(x_p, y_p)$ . Вона охоплює п'ять нелінійних рівнянь, серед яких рівняння (1), (2), (4) є інтегральними та залежать від невідомих параметрів підінтегральних функцій та невідомих верхніх границь для визначеного інтегралу.

Рівняння (1)–(5) визначаються формулами для кривої  $x(s), y(s), 0 \leq s \leq S$  в натуральній параметризації [2], де кут нахилу дотичної  $\varphi(s)$  в точці  $x(s), y(s)$  визначають за формулою:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds = \varphi(0) + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs, \quad (6)$$

а координати точок – за формулами:

$$\begin{aligned} x(s) &= x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds, \\ y(s) &= y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $k(s) = as^2 + bs + c$  – задана квадратична функція кривини. Так, інтегральні рівняння (1) та (2) зв'язують між собою точки  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$  за формулами (7). Рівняння (3) за формулою (6) забезпечує потрібний кут  $\varphi_2$  у точці  $(x_2, y_2)$ , який визначається за заданим кутом  $\varphi_1$  у точці  $(x_1, y_1)$ . Рівняння (4) і (5) забезпечують кут, рівний  $\varphi_p$  у точці з абсцисою  $x_p$ .

У загальному випадку система (1)–(5) має багато розв'язків. Наприклад, у табл. 1 наведено два розв'язки для таких вихідних даних:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, y_1 = 2.46, \varphi_1 = 0; \quad x_2 = 1, y_2 = 2.75, \\ \varphi_2 = 0; \quad x_p = 0.7, \varphi_p = 0.209440 = 12^\circ. \end{aligned} \quad (8)$$

Графіки кривих для цих розв'язків наведено на рисунку. Крива для першого розв'язку розташована ліворуч, крива для другого розв'язку – праворуч.

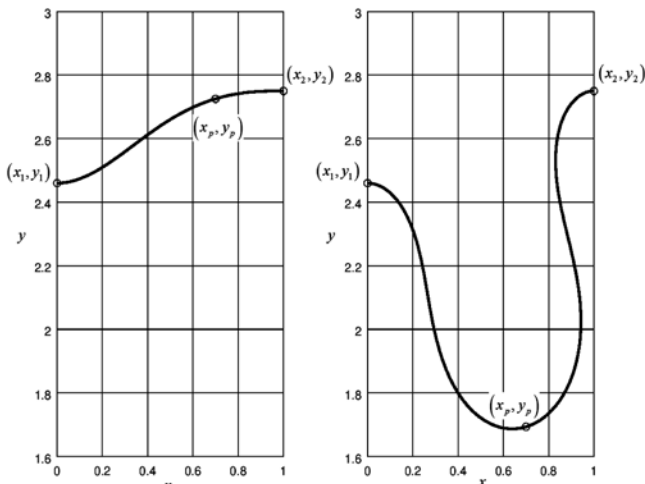


Рисунок. Графіки кривих, які відповідають розв'язкам із табл. 1

Із рисунку видно, що для першого розв'язку крива є S-подібною. Для другого розв'язку це не так. Він містить дві ділянки, кожна із яких є S-подібною кривою, та характеризується довжиною  $S^* = 2.42487$ , яка є значно більшою за довжину  $S^* = 1.05562$  для першого розв'язку. Зауважимо, що для другого розв'язку існує ділянка кривої  $y(x)$ , де ординати визначені неоднозначно.

Відсікти розв'язки, яким не відповідають S-подібні криві, можна за допомогою обмеження зверху на довжину кривої. Наприклад, якщо до системи рівнянь (1)–(5) додати нерівність  $S \leq 2$ , то це буде відсікати другий розв'язок із табл. 1.

## 2. Оптимізаційна задача для модифікації r-алгоритму

Розглянемо оптимізаційну задачу [4], яка має вигляд: знайти

$$\begin{aligned} f^* = f(a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*) = \min_{a,b,c,S,s_p} \left\{ f(a,b,c,S,s_p) = \right. \\ \left. = \sum_{i=1}^3 |f_i(a,b,c,S)| + \sum_{i=4}^5 |f_i(a,b,c,s_p)| \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

за обмежень

$$S_{lo} \leq S \leq S_{up}, \quad (10)$$

$$|x_p - x_1| \leq s_p \leq S, \quad (11)$$

де

$$f_1(a,b,c,S) = x_2 - x_1 - \int_0^S \cos \left( \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds,$$

$$f_2(a,b,c,S) = y_2 - y_1 - \int_0^S \sin \left( \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds,$$

$$f_3(a,b,c,S) = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{aS^3}{3} - \frac{bS^2}{2} - cS,$$

$$f_4(a,b,c,s_p) = x_p - x_1 - \int_0^{s_p} \cos \left( \varphi_1 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs \right) ds,$$

$$f_5(a,b,c,s_p) = \varphi_p - \varphi_1 - \frac{as_p^3}{3} - \frac{bs_p^2}{2} - cs_p.$$

Таблиця 1

Два розв'язки системи (1)–(5) для вихідних даних (8)

	1	2
$a^*$	7.92822	-7.03716
$b^*$	-11.4065	16.4890
$c^*$	3.07557	-6.19900
$S^*$	1.05562	2.42487
$s_p^*$	0.753992	1.15072

Тут цільова функція (9) є негладкою та означає мінімізацію суми модулів нев'язок для рівнянь (1)–(5). Обмеження (10) і (11) гарантують додатні значення із допустимих діапазонів для довжин  $S$  та  $s_p$ , які є верхніми границями для визначених інтегралів у функціях  $f_1, f_2, f_4$ . Тут  $S_{lo} > 0, S_{up}$  – параметри для управління нижньою та верхньою межами на  $S$  – загальну довжину кривої. При цьому нижня межа  $S_{lo}$  не може бути

меншою за  $S_{min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , де  $S_{min}$  – мінімальна відстань між точками  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$ . Чим ближчим до  $S_{min}$  є значення верхньої межі  $S_{up}$ , тим легше для системи (1)–(5) забезпечити розв'язок, який визначає  $S$ -подібну криву (перший розв'язок на рисунку).

Якщо в результаті пошуку локального мінімуму для задачі (9)–(11) отримуємо  $f^* = 0$ , то це означає, що знайдена точка глобального мінімуму  $a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*$ , яка є розв'язком системи (1)–(5). Якщо отримуємо  $f^* > 0$ , то знайдена точка  $a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*$  не є розв'язком системи (1)–(5). Це може бути як у випадку, коли немає розв'язку у системи (1)–(5) за обмежень (10), (11), так і у випадку, якщо алгоритм зупиниться у «неоптимальній» точці, враховуючи, що для великих значень параметра  $S_{up}$  задача (9)–(11) є багатоекстремальною.

Задача (9)–(11) є задачею мінімізації негладкої функції, яка визначена не за всіх значень  $S$  та  $s_p$ , а тільки за тих, які є додатними й дають змогу обчислювати визначені інтеграли для функцій  $f_1(a, b, c, S), f_2(a, b, c, S)$  та  $f_4(a, b, c, s_p)$ . Для знаходження точки глобального мінімуму у задачі (9)–(11) може бути використано модифікацію  $r$ -алгоритму [7], яка враховує зазначену особливість задачі. У точці, де узагальнений градієнт цільової функції є невизначеним, модифікація  $r$ -алгоритму використовує узагальнений градієнт до максимально порушеного із обмежень (10) та (11).

Алгоритм розв'язання задачі (9)–(11) реалізований за допомогою методу мультистарту та оставе-функції **ralgb5a** [8]. Він використовує аналітичний спосіб обчислення узагальнених градієнтів цільової функції (9) та метод трапецій для обчислення визначених інтегралів. За його допомогою можна знаходити як розв'язки, яким відповідають  $S$ -подібні криві, так і інші розв'язки.

Алгоритм виявився стійким при пошуку  $S$ -подібного контуру (перший розв'язок у табл. 1). Це пояснюється тим, що вихідні дані (8) є добре масштабованими і відношення максимальної за модулем компоненти розв'язку до мінімальної є невеликим та рівним 11.4065/0.753992. Тому за параметра  $S_{up} = 1.2 * S_{min}$  з усіх п'ятдесяти стар-

тових точок, які вибирались випадковими або із інтервалу  $[0, 1]$  або із інтервалу  $[0, 10]$ , алгоритм збігається до одного й того ж розв'язку системи (1)–(5). Однак при виборі стартових точок з інтервалу  $[0, 50]$  алгоритм у дев'ятнадцяти випадках знайшов розв'язок для  $S$ -подібного контуру, а у 31 випадку не зміг знайти такого розв'язку та зупинився в точках, де значення цільової функції (9) є більшим за нуль.

### 3. Оптимізаційні задачі для методів BFGS і L-BFGS-B

Для використання методів BFGS і L-BFGS-B необхідно оптимізаційну задачу сформулювати як задачу мінімізації гладкої функції за двосторонніх обмежень на змінні (для методу L-BFGS-B). Для цього будемо використовувати два формулювання оптимізаційних задач, які є еквівалентними задачі знаходження розв'язків системи (1)–(5).

Перша оптимізаційна задача має вигляд: знайти

$$F_1^* = F_1(a^*, b^*, c^*, S^*, \lambda^*) = \min_{a, b, c, S, \lambda} \left\{ F_1(a, b, c, S, \lambda) = \sum_{i=1}^3 f_i^2(a, b, c, S) + \sum_{i=4}^5 f_i^2(a, b, c, \lambda S) \right\} \quad (12)$$

за обмежень

$$x_p / S_{max} \leq \lambda \leq 1, S_{min} \leq S \leq S_{max}, \quad (13)$$

де  $S_{min}$  та  $S_{max}$  – нижня та верхня межі на невідому довжину  $S$ . Тут цільова функція (12) є гладкою та означає мінімізацію суми квадратів нев'язок до рівнянь (1)–(5). Для зручності задання двосторонніх обмежень змінна  $s_p$  замінена на змінну  $\lambda$ , яка визначається зі співвідношення  $s_p = \lambda S$ .

Друга оптимізаційна задача має вигляд: знайти

$$F_2^* = F_2(a^*, b^*, c^*, S^*, s_p^*) = \min_{a, b, c, S, s_p} \left\{ F_2(a, b, c, S, s_p) = \sum_{i=1}^3 f_i^2(a, b, c, S) + \sum_{i=4}^5 f_i^2(a, b, c, s_p) \right\} \quad (14)$$

за обмежень

$$a_0 - \varepsilon_a \leq a \leq a_0 + \varepsilon_a, b_0 - \varepsilon_b \leq b \leq b_0 + \varepsilon_b, c_0 - \varepsilon_c \leq c \leq c_0 + \varepsilon_c \quad (15)$$

$$(s_p)_0 - \varepsilon_s \leq s_p \leq (s_p)_0 + \varepsilon_s, S_0 - \varepsilon_s \leq S \leq S_0 + \varepsilon_s, \quad (16)$$

де  $a_0, b_0, c_0, S_0, (s_p)_0$  – початкове наближення, в околі якого параметри  $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$  визначають нижні та верхні межі на невідомі коефіцієнти  $a, b, c$ , а параметр  $\varepsilon_s$  визначає нижні та верхні межі на невідомі довжини  $S$  та  $s_p$ . Зауважимо, що для тестових прикладів за початкові наближення можуть бути вибрані точки глобальних мінімумів, знайдені за допомогою модифікації  $r$ -алгоритму для задачі (9)–(11).

Нижче представлено результати збіжності методів L-BFGS-B та BFGS для обох оптимізаційних

задач, яким відповідає оптимальний розв’язок 1 з табл. 1 для S-подібної кривої. Для обчислювального експерименту використовували реалізації алгоритмів BFGS та L-BFGS-B на мові Python із бібліотеки SciPy. Критерієм успішного розв’язання задач було вибрано умову, що значення функції, що мінімізується, менше ніж  $10^{-9}$ , і норма градієнта менша ніж  $10^{-10}$ .

У табл. 2 наведено результати збіжності алгоритму L-BFGS-B для задачі (12)–(13) залежно від вибору стартової точки, яка генерувалась за допомогою датчика випадкових чисел **np.random.seed(100)** у діапазонах (гіперкубах)  $[0,1]^5$ ,  $[0,10]^5$ ,  $[0,20]^5$ ,  $[0,30]^5$  та  $[0,50]^5$ . Нижня та верхня межі вибиралися за даними (8), де

$$S_{\min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

а  $S_{\max} = qS_{\min}$ , де  $q \in \{1.2, 1.5, 2.0\}$ .

Таблиця 2

**Збіжність методу L-BFGS-B для задачі (12)–(13)**

гіперкуб	$q = 1.2$	$q = 1.5$	$q = 2.0$
$[0,1]^5$	50/50	50/50	50/50
$[0,10]^5$	50/50	50/50	50/50
$[0,20]^5$	46/50	43/50	50/50
$[0,30]^5$	40/50	40/50	49/50
$[0,50]^5$	30/50	36/50	38/50

Із табл. 2 видно, що із 50 запусків алгоритм L-BFGS-B завжди збігається до точки глобального мінімуму задачі (12)–(13), якщо стартова точка локалізована у діапазонах  $[0,1]^5$  та  $[0,10]^5$ . Для діапазонів  $[0,20]^5$ ,  $[0,30]^5$  та  $[0,50]^5$  метод не завжди збігається до точки глобального мінімуму. Наприклад, для гіперкуба  $[0,50]^5$  та  $q = 1.2$  алгоритм **L-BFGS-B** збігається до точки глобального мінімуму у 30 випадках із 50.

У табл. 3 наведено результати порівняння збіжності методів BFGS та L-BFGS-B для задачі (14)–(16), де початкове наближення дорівнює першому розв’язку системи з табл. 1, за різних значень параметрів  $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c, \epsilon_s$ , які визначають нижні та верхні межі на змінні. Тут параметр  $\epsilon_s \leq 0.15$  вибирається таким, щоб виконувалася нерівність  $s_p \leq S$ .

Із табл. 3 видно, що зі зменшенням параметрів  $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c, \epsilon_s$  починає збільшуватися кількість

Таблиця 3

**Збіжність методів BFGS і L-BFGS-B для задачі (14)–(16)**

$\epsilon_a$	$\epsilon_b$	$\epsilon_c$	$\epsilon_s$	BFGS	L-BFGS-B
20	20	20	0.15	79/100	99/100
20	20	20	0.01	82/100	97/100
10	10	10	0.15	98/100	92/100
10	10	10	0.1	97/100	96/100
10	10	10	0.01	100/100	100/100
5	5	5	0.1	100/100	100/100

успішних запусків, тобто методи збігаються до точки глобального мінімуму. Наприклад, для  $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c = 10, \epsilon_s = 0.01$  та  $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c = 5, \epsilon_s = 0.1$  обидва методи збігаються до точки глобального мінімуму у 100 випадках зі 100. Варто зазначити, що проєктивний варіант методу є більш стійким у випадку далеких стартових точок, яким відповідають параметри  $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c \geq 20$ , які визначають нижні та верхні межі на змінні. Тут параметр  $\epsilon_s \leq 0.15$ .

**Висновки**

У роботі описано застосування методу BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) та його проєктивного варіанта L-BFGS-B для мінімізації нелінійної функції, яка відповідає задачі побудови S-подібної кривої у натуральній параметризації. Крива проходить через дві задані точки із заданими кутами нахилу дотичних у них та забезпечує заданий кут нахилу дотичної у проміжній точці із заданою абсцисою. Кут нахилу дотичної в точці з відомою абсцисою використовується для керування точкою перегину S-подібної кривої, за допомогою якої моделюється фрагмент зовнішнього контуру сопла Франкля.

Результати обчислювальних експериментів показали, що методи BFGS та L-BFGS-B є ефективними для знаходження розв’язків системи нелінійних рівнянь, якщо стартова точка вибирається в такому околі точки мінімуму, де цільова функція достатньо точно апроксимується опуклою квадратичною функцією. Це дає змогу використовувати методи BFGS та L-BFGS-B для моделювання фрагментів зовнішнього контуру сопла Франкля у вигляді S-подібних кривих, якщо вихідні дані для системи (1)–(5) є добре масштабованими (усі компоненти розв’язку мають один порядок).

**Список літератури**

1. Борисенко В. Д. Геометрическое моделирование s-образных скелетных линий профилей лопаток осевых компрессоров / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, И. В. Устенко // Вестник двигателестроения. – 2018. – № 1. – С. 45–52.
2. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
3. Пшеничный Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – Москва : Наука, 1975. – 319 с.
4. Стецюк П. І. До побудови зовнішнього контура сопла Франкля за квадратичною кривою / П. І. Стецюк, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай // Кібернетика та комп’ютерні технології. – 2020. – № 1. – С. 23–31.

5. Byrd R. H. Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization // R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. – 1995. – Vol. 16 (5). – P. 1190–1208.
6. Gill P. E. Practical optimization / P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright. – London: Academic Press, 1981. – 419 p.
7. Shor N. Z. Modified  $r$ -algorithm to find the global minimum of polynomial functions / N. Z. Shor, P. I. Stetsyuk // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 1997. – Vol. 33 (4). – P. 482–497.
8. Stetsyuk P. I. Theory and Software Implementations of Shor's  $r$ -Algorithms / P. I. Stetsyuk // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2017. – Vol. 53 (3). – P. 692–703.

### References

- Borisenko, V. D., Ustenko, S. A., & Ustenko, I. V. (2018). Geometricheskoe modelirovanie s-obraznykh skeletnykh liniy profilye lopatok osevykh kompressorov. *Vestnik dvigatelestroeniya*, 1, 45–52 [in Russian].
- Byrd, R. H., Lu, P., & Nocedal, J. (1995). Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 16 (5), 1190–1208.
- Gill, P. E., Murray, W., & Wright, M. H. (1981). *Practical optimization*. London, Academic Press.
- Mischenko, A. S., & Fomenko, A. T. (2004). *Kratkiy kurs differentsialnoy geometrii i topologii*. Moskva: FIZMATLIT [in Russian].
- Pshenichnyy, B. N., & Danilin, Yu. M. (1975). *Chislennyye metody v ekstremal'nykh zadachah*. Moskva: Nauka [in Russian].
- Shor, N. Z., & Stetsyuk, P. I. (1997). Modified  $r$ -algorithm to find the global minimum of polynomial functions. *Cybernetics and Systems Analysis*, 33 (4), 482–497. <https://doi.org/10.1007/BF02733104>
- Stetsiuk, P. I., Tkachenko, O. V., & Hrytsai, O. L. (2020). Do pobudovy zovnishnoho kontura sopla Franklia za kvadratnychnoiu kryvynoiu. *Kibernetyka ta kompiuterni tekhnologii*, 1, 23–31 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.34229/2707-451X.20.1.3>.
- Stetsyuk, P. I. (2017). Theory and Software Implementations of Shor's  $r$ -Algorithms. *Cybernetics and Systems Analysis*, 53, 692–703. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9971-1>

P. Stetsyuk, V. Lyashko, A. Suprun

## A BFGS METHOD FOR THE PROBLEM OF BUILDING S-SHAPED CURVE

We consider the application of the BFGS method (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) and its projective version  $L$ -BFGS- $B$  for minimization of nonlinear function, which corresponds to finding solutions to a system of five nonlinear equations. Among them three equations are integral and depend on unknown parameters of integrands and unknown upper bounds for definite integrals. This system represents the problem of building an  $S$ -shaped curve in natural parameterization, which passes through the two given points with given tangents inclination angles and provides a given tangent inclination angle at an intermediate point with a given abscissa. The tangent inclination angle at the point with known abscissa is used to control the inflection point of the  $S$ -shaped curve, by which a fragment of the external contour of the Frankl nozzle is modeled.

The material of the article is presented in three sections. Section 1 describes a system of five nonlinear equations and analyses its properties related to the existence of many solutions. In section 2 the optimization problem with a non-smooth objective function and linear constraints is presented, the global minima of which correspond to solutions of a system of nonlinear equations. There also is described the application of the modification of  $r$ -algorithm to find global minima of the optimization problem.

Section 3 describes the application of BFGS and  $L$ -BFGS- $B$  methods to find local minima of smooth functions corresponding to finding solutions of a system of nonlinear equations. We formulate two optimization problems with smooth objective functions and two-sided constraints on variables and describe the results of computational experiments for finding solution of the system of nonlinear equations, presented in Section 1, by  $S$ -shaped curve. It is shown that BFGS and  $L$ -BFGS- $B$  methods are effective if the starting point is selected in such a neighborhood of the minimum point, where the minimized function is approximated fairly accurately by a convex quadratic function.

**Keywords:**  $S$ -shaped curve, quadratic curvature, nonlinear programming problem,  $r$ -algorithm, quasi-Newton methods, BFGS method.



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

Матеріал надійшов 15.06.2020