УДК 004.82.855’24
DOI: 10.18523/2617-3808.2021.4.4-9

Олецький О. В.

ЗАСТОСУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ СТОХАСТИЧНИХ МАТРИЦЬ ДО ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ ТА РАНЖУВАННЯ АЛЬТЕРНАТИВ

Досліджено можливість застосування моделі «стан–імовірність вибору» на основі прямокутних стохастичних матриць до задачі ранжування альтернатив агентом або колективом агентів. Показано, що отримані раніше результати для задачі вибору можуть бути з деякими змінами перенесені на задачу ранжування. Висвітлено також, як на основі розподілів мір важливості для задачі оцінювання та ранжування альтернатив можна отримати аналогічну модель для задачі вибору.

Для формування матриці станів, рядки якої відповідають розподілам мір важливості альтернатив, використано метод попарних порівнянь у рамках методу аналізу ієрархій Сааті. Запропоновано розглядати транзитивні шкали з параметром, який впливає на розкид мір важливості. Введено також параметр, який задає міру впевненості агента.

Наведено результати численних експериментів.

Ключові слова: ранжування альтернатив, стохастичні прямокутні матриці, попарні порівняння, метод аналізу ієрархій, агенти.

Вступ

Прямокутні стохастичні матриці описано в [6] у зв’язку з моделюванням процесів, пов’язаних із вибором між альтернативами. Агент, що приймає рішення (або колектив таких агентів), має вибрати одну з *n* альтернатив. Ймовірності вибору альтернатив зручно описувати у вигляді матриці $Z = (z_{ij}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$. Рядки цієї матриці відповідають можливим розподілам ймовірностей вибору (тут постулюється кількість цих розподілів *m*), а стовпчики – альтернативам. Більш точно, z_{ij} – це ймовірність того, що агент вибере *j*-ту альтернативу за *i*-го розподілу.

Оскільки кожний рядок задає розподіл імовірностей між елементами повної групи подій, то очевидно, що сума елементів кожного рядка матриці *Z* дорівнює 1, тобто

$$\forall i \sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1, \qquad (1)$$
$$\forall i, j \quad 0 \le z_{ij} \le 1.$$

Властивість (1) є визначальною для квадратних стохастичних матриць. Тому за аналогією прямокутні матриці, для яких виконується (1), було запропоновано назвати прямокутними стохастичними.

Важливим є також поняття збалансованих прямокутних стохастичних матриць, для яких, крім (1), виконується властивість

$$\forall j, l \sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \sum_{i=1}^{m} z_{il} \qquad (2)$$

тобто суми елементів усіх стовпчиків дорівнюють одна одній. Можна показати, що для збалансованої прямокутної стохастичної матриці сума елементів кожного стовпчика дорівнює $\frac{m}{n}$.

У [6] проведено дослідження прямокутних стохастичних матриць, зокрема збалансованих. Було запропоновано модель «стан–імовірність дії», в рамках якої стани відповідають розподілам імовірностей вибору, а зміни станів, тобто зміни цих ймовірностей, описуються на основі деякого марковського ланцюга. На цій основі було встановлено деякі достатні умови досягнення динамічної рівноваги альтернатив, тобто ситуації, коли всі альтернативи обираються з однаковими ймовірностями; ці умови суттєво використовують властивість збалансованості. Для задачі вибору найбільше значення має випадок *n* = 2, і робота [6] була в першу чергу пов’язана з дослідженням саме цього випадку.

Цю статтю присвячено дослідженню можливості застосування цього підходу для дещо іншої задачі, а саме – задачі оцінювання мір важливостей альтернатив та ранжування альтернатив на цій основі.

Прямокутні стохастичні матриці в задачі оцінювання альтернатив

Нехай, як і раніше, маємо n альтернатив. Нехай постульовано m можливих розподілів мір важливостей (кожний розподіл є вектором, всі компоненти якого є невід'ємними, і сума елементів кожного вектора дорівнює 1). Позначимо через z_{ij} оцінку важливості j-ї альтернативи для i-го розподілу.

Тоді матриця $Z = (z_{ij},\ i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$ є прямокутною стохастичною матрицею.

У такій інтерпретації ситуація динамічної рівноваги – це ситуація, для якої всі альтернативи мають однакові міри важливості. Порівняно з задачею вибору, тут розгляд випадку $n > 2$ набуває більшої актуальності.

Як і для задачі вибору, розглядається вектор $p = (p_1, ..., p_m)$, де p_i – ймовірність того, що агент перебуває у i-му стані. Тоді міру важливості j-ї альтернативи природно розглядати як математичне очікування її важливості за всіма станами (можливими розподілами мір важливостей), тобто

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} p_i z_{ij},\ j = 1,..,n \qquad (3)$$

або в матричному вигляді

$$v = pZ$$

Переходи між станами (змістовно – зміну оцінок важливості альтернатив) можна описувати на основі марковського ланцюга аналогічно до того, як це зроблено в [6].

Отримано формули, аналогічні формулам для задачі вибору [6]. Це означає, що результати, отримані для задачі вибору, зокрема достатні умови динамічної рівноваги, можуть бути перенесені на задачу оцінювання альтернатив.

Однак постає запитання про формування системи станів, що описується матрицею Z. Далі розглядається підхід на основі попарних порівнянь та методу аналізу ієрархій Сааті.

Формування системи станів на основі попарних порівнянь

Одним з основних методів оцінювання та ранжування альтернатив є метод аналізу ієрархій, запропонований Т. Сааті. Цей метод базується на побудові та аналізі матриць попарних порівнянь.

На основі зазначеного аналізу пропонують таку методику формування матриці станів. Розподіл мір важливості $z^{(i)}$ (i-й рядок матриці Z), що відповідає i-му стану, формується на основі матриці попарних порівнянь $\Delta^{(i)} = (\delta_{kl},\ k, l = 1, ..., n)$, де δ_{kl} – міра переваги k-ї альтернативи над l-ю в i-му стані. При цьому $\forall k,l\ \delta_{kl} > 0;\ \forall k\ \delta_{kk} = 1;\ \forall k,l\ \delta_{lk} = \dfrac{1}{\delta_{kl}}$.

Т. Сааті запропонував таку шкалу градацій переваг: *1* – варіанти рівнозначні; *3* – слабка перевага; *5* – сильна перевага; *7* – дуже сильна перевага; *9* – абсолютна перевага. Значення *2, 4, 6, 8* розглядаються як проміжні.

Тоді вектор $z^{(i)}$ обчислюється як перронів вектор, тобто нормалізований головний власний вектор матриці $\Delta^{(i)}$.

Далі, переходи між станами набувають очевидної змістовної інтерпретації, тож їх природно інтерпретувати як зміни переваг однієї альтернативи над іншою.

Приклад 1. Сформуємо матрицю станів (можливих розподілів мір важливостей альтернатив). Для простоти обмежимося випадком $n = 2$. Будемо використовувати стандартну шкалу Сааті.

Очевидно, для цього випадку матриці попарних переваг можна представити у вигляді

$$\Delta^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & q^{(i)} \\ \dfrac{1}{q^{(i)}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$q^{(i)} \in \{1/9,\ 1/8,\ ...,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ ...,8,\ 9\}.$$

Тоді отримуємо таку матрицю станів:

$$Z = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.111 & 0.8889 \\ 0.125 & 0.875 \\ 0.1429 & 0.8571 \\ 0.1667 & 0.8333 \\ 0.2 & 0.8 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.3333 & 0.6667 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.6667 & 0.3333 \\ 0.75 & 0.25 \\ 0.8 & 0.2 \\ 0.8333 & 0.1667 \\ 0.8571 & 0.1429 \\ 0.875 & 0.125 \\ 0.8889 & 0.1111 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Ілюстрація динамічної рівноваги альтернатив

Проілюструємо досягнення динамічної рівноваги альтернатив, для чого скористаємося теоремою про симетричне врівноваження з [6].

Для матриці Z, отриманої у прикладі 1, візьмемо вектор імовірностей

$$p = (0.05, 0., 0.05, 0., 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.2, 0.05, 0.05, 0.1, 0.1, 0., 0.05, 0., 0.05).$$

Безпосередньою підстановкою вектора p в (3) отримуємо вектор

$$v = (0.5, 0.5),$$

тобто альтернативи оцінюються як такі, що мають однакові міри важливості.

Отримання матриці «стан–імовірність дії»

Від описаної інтерпретації рядків матриці Z як розподілів мір важливостей легко перейти до описаної в [6] моделі «стан–імовірність дії», в якій рядки відповідають імовірностям того, що агент проголосує за певну альтернативу. Точніше, в цій моделі розглядається матриця $Z' = (z'_{ij},\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, в якій z'_{ij} – це ймовірність того, що агент, який перебуває в i-му стані, проголосує за j-ту альтернативу.

Для переходу від Z до Z' можна скористатися стандартним підходом, відповідно до якого чим більшою є міра важливості альтернативи, тим із більшою ймовірністю агент за неї проголосує. Наприклад, у теорії прийняття рішень та навчання з підкріпленням широкого поширення набуло експоненційне перетворення, відповідно до якого можна покласти

$$z'_{ij} = \frac{e^{\sigma \cdot z_{ij}}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\sigma \cdot z_{ij}}}.$$

Коефіцієнт σ можна розглядати як деякий параметр моделі. За його допомогою можна регулювати, якою мірою альтернативи, що оцінюються як кращі, матимуть перевагу над іншими при виборі однієї з альтернатив.

Приклад 2. Для прикладу 1 за σ = 3 отримуємо таку матрицю «стан–імовірність дії» (округлено):

$$Z' = \begin{pmatrix} 0.0832 & 0.9168 \\ 0.0884 & 0.9116 \\ 0.0953 & 0.9047 \\ 0.1050 & 0.8950 \\ 0.1192 & 0.8808 \\ 0.1419 & 0.8581 \\ 0.1824 & 0.8176 \\ 0.2689 & 0.7311 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.7311 & 0.2689 \\ 0.8176 & 0.1824 \\ 0.8581 & 0.1419 \\ 0.8808 & 0.1192 \\ 0.8950 & 0.1050 \\ 0.9047 & 0.0953 \\ 0.9116 & 0.0884 \\ 0.9168 & 0.0832 \end{pmatrix}$$

За зменшення σ імовірність вибору кращих альтернатив порівняно з гіршими зменшується. Зокрема, за σ = 0.5 матриця «стан–імовірність дії» набуває вигляду (округлено):

$$Z' = \begin{pmatrix} 0.4013 & 0.5987 \\ 0.4040 & 0.5960 \\ 0.4073 & 0.5927 \\ 0.4117 & 0.5883 \\ 0.4174 & 0.5826 \\ 0.4256 & 0.5744 \\ 0.4378 & 0.5622 \\ 0.4584 & 0.5416 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5416 & 0.4584 \\ 0.5622 & 0.4378 \\ 0.5744 & 0.4256 \\ 0.5826 & 0.4174 \\ 0.5883 & 0.4117 \\ 0.5927 & 0.4073 \\ 0.5960 & 0.4040 \\ 0.5987 & 0.4013 \end{pmatrix}$$

Параметру σ можна надати такої змістовної інтерпретації. За великих σ агент є «рішучим» і з великою ймовірністю віддає перевагу альтернативі, яка має навіть незначну перевагу над іншою. За малих же σ агент є «нерішучим» і коливається, навіть якщо одна з альтернатив має значну перевагу.

Застосування транзитивних шкал

Механічне застосування стандартної шкали, запропонованої Сааті, у матриці попарних порівнянь не завжди дає змогу отримати добрі результати. На це звертали увагу багато дослідників ([2; 3; 4] та ін.), і ситуація в цьому питанні досить суттєво залежить від предметної сфери, що розглядається. Часто, зокрема, розкид між оцінками найкращого та найгіршого варіантів виходить надто великим, і його бажано зменшити. Крім того, застосування шкали Сааті само по собі зменшує узгодженість матриці попарних порівнянь. Наприклад, якщо перевага альтернативи *A* над альтернативою *B* і перевага *B* над *C* оцінюється як мінімально слабка перевага (тобто *2*), то як оцінити перевагу А над С: як *3* (наступна градація шкали) чи як *4* (добуток мір переваг)? Хоч цей фактор і не є єдиним джерелом можливої неузгодженості, але на нього варто звернути увагу.

Ідея полягає у використанні транзитивної шкали переваг, як це було описано в [4]. Вводиться параметр $\tau > 1$. Тоді рівноцінність варіантів у матриці попарних порівнянь буде оцінено значенням *1*, мінімальна перевага – значенням τ, наступна градація переваг – значенням τ^2 і т. д. Іншими словами, можна розглядати такі градації переваг:

$1 = \tau^0$ – альтернативи рівноцінні, немає переваги;
- τ^1 – слабка перевага;
- τ^2 – сильна перевага;
- τ^3 – дуже сильна перевага;
- τ^4 – абсолютна перевага.

Подібні шкали названо в [4] транзитивними. Очевидно, що для кожної конкретної задачі кількість таких градацій може бути змінено.

За фіксованої кількості градацій *H* шкала градацій може мати вигляд (для простоти розглядаємо випадок непарного *H*, за якого градації симетричні, а центральна градація має значення *1* (рівнозначність альтернатив)):

$$(\tau^{-[H/2]}, \tau^{-[H/2]+1}, \ldots, \tau^{-1}, 1, \tau, \ldots, \tau^{[H/2]})$$

Приклад 3. Проілюструємо застосування транзитивної шкали. Нехай, як і у прикладі 1, кількість градацій дорівнює 17.

За $\tau = 1.5$ шкала градацій має вигляд

```
(0,0390    0,0585    0,0878
0,1317     0,1975    0,2963
0,4444     0,6667    1,0000
1,5000     2,2500    3,3750
5,0625     7,5938    11,3906
17,0859    25,6289)
```

а матриця розподілів мір важливостей (округлено):

$$Z = \begin{pmatrix} 0.0376 & 0.9624 \\ 0.0553 & 0.9447 \\ 0.0807 & 0.9193 \\ 0.1164 & 0.8836 \\ 0.1649 & 0.8351 \\ 0.2286 & 0.7714 \\ 0.3077 & 0.6923 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.6923 & 0.3077 \\ 0.7714 & 0.2286 \\ 0.8351 & 0.1649 \\ 0.8836 & 0.1164 \\ 0.9193 & 0.0807 \\ 0.9447 & 0.0553 \\ 0.9624 & 0.0376 \end{pmatrix}$$

Параметр τ можна змістовно проінтерпретувати так: за зменшення цього параметра зменшується розкид між оцінками найкращої та найгіршої альтернативи. Його підбір має значення для ситуацій, коли цей розкид не має бути ні надто великим, ні надто маленьким. Зокрема, у [2; 3] з огляду на ці міркування було досліджено вплив параметру τ на адекватність оцінювання студентських робіт з використанням методу аналізу ієрархій.

Висновки та обговорення

У роботі розглянуто підхід до ранжування та оцінювання альтернатив на основі застосування прямокутних стохастичних матриць, у яких рядки відповідають можливим розподілам мір важливості альтернатив, а стовпчики – альтернативам. Досліджено питання про динамічну рівновагу альтернатив; тут під динамічною рівновагою розуміється ситуація, коли всі альтернативи мають однакові міри важливості. Показано, що результати роботи [6], в якій було встановлено деякі достатні умови динамічної рівноваги для задачі вибору у випадку збалансованих матриць, може бути перенесено і на задачу оцінювання і ранжування альтернатив.

Показано, у який спосіб можна отримувати можливі розподіли мір важливості альтернатив як рядки матриці станів на основі методу попарних порівнянь. У рамках підходу, що описується, висвітлено, як можна пов'язати матрицю оцінок альтернатив із матрицею «стан–імовірність дії».

Методика, що розглянута у статті, залежить від двох параметрів:

– параметр, який регулює розкид між оцінками найкращої та найгіршої альтернатив для кожного рядка матриці;
– параметр, який регулює міру впевненості агента при виборі альтернативи за заданого розподілу мір важливості.

На основі деякої подальшої структуризації описаний підхід можна розвинути в напрямі застосування класичної дворівневої схеми методу аналізу ієрархій, тобто розглядати оцінки важливості альтернатив за окремими критеріями та міри важливості самих критеріїв.

Інший напрям, що сьогодні інтенсивно розвивається, – моделювання змін уподобань агентів у результаті інформаційних впливів [5]. Агенти впливу можуть докладати певних зусиль, щоб схилити агентів, які голосують, на свій бік. Зокрема, у [2; 7] описано систему підтримки прийняття рішень на основі методу аналізу ієрархій, важливою компонентою якої є підсистема вироблення рекомендацій, спрямованих на підвищення місця тієї чи іншої альтернативи. Подібний напрям (зусилля, спрямовані на досягнення обраною альтернативою бажаного результату) розглянуто також у [1].

У [6] запропоновано підхід, за якого стартовою точкою є ситуація динамічної рівноваги, а зусилля гравців спрямовані на відхід від цієї ситуації. Ці міркування наводять на думку про доцільність пошуку інших умов досягнення динамічної рівноваги, крім сформульованих у [6]. Крім того, в [6] встановлено достатні умови динамічної рівноваги лише для $n = 2$, а для задачі оцінювання та ранжування альтернатив доцільно розглядати більш загальний випадок. Можуть ставитися оптимізаційні задачі, пов'язані з мінімізацією зусиль агентів впливу. У цьому контексті також видається доцільним моделювання зміни уподобань агентів на основі методів навчання з підкріпленням.

Список літератури

1. Горборуков В. В. Пошук оптимальних відхилень значень критеріїв для досягнення обраною альтернативою бажаного результату при розв'язку багатокритеріальної задачі вибору / В. В. Горборуков, О. В. Франчук // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2019. – Т. 2. – С. 10–15.
2. Олецький О. В. Про застосування методу аналізу ієрархій для автоматизованого оцінювання студентських робіт / О. В. Олецький, О. С. Тригуб // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2020. – Т. 3. – С. 127–131. https://doi.org/10.18523/2617-3808.2020.3.127-131
3. Олецкий А. В. О повышении уровня адекватности в результатах процесса оценивания учебных проектов на основе параметрической релаксации метода парных сравнений / А. В. Олецкий, М. Ф. Махно // Проблемы управления и информатики. – 2021. – № 1. – С. 122–133.
4. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
5. Ivokhin E. V. On formalization of information dissemination processes based on hybrid diffusion models / E. V. Ivokhin, Yu. A. Naumenko // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – Vol. 50 (7). – Pp. 79–86. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i7.70
6. Oletsky O. V. Formalizing the Procedure for the Formation of a Dynamic Equilibrium of Alternatives in a Multi-Agent Environment in Decision-Making by Majority of Votes / O. V. Oletsky, E. V. Ivohin // Cybern Syst Anal. – 2021. – Vol. 57. – Pp. 47–56. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00328-y
7. Tryhub O. S. Researching semistructured problems of multicriteria optimization using the software system / O. S. Tryhub, R. O. Tryhub, V. Gorborukov // Наукові записки НаУКМА. – 2013. – Т. 151: Комп'ютерні науки. – С. 79–88.

References

Chernorutskii, I. (2005). *Metody prinyatiya resheniy*. Sankt-Peterburg: BHV-Peterburg [in Russian].

Gorborukov, V., & Franchuk, O. (2019). Poshuk optymalnych vidhylen znachen kryteriiv dla dosyagnennia obranoyu alternativoyu bazhanogo rezultatu pry rozviazky bagatokryterialnoi zadachi vyboru. *Naukovi zapysky NaUKMA. Kompiuterni nauky*, *2*, 10–15 [in Ukrainian].

Ivokhin, E. V., & Naumenko, Yu. A. (2018). On formalization of information dissemination processes based on hybrid diffusion models. *Journal of Automation and Information Sciences*, *50* (7), 79–86. https://doi.org/ 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i7.70

Oletsky, O. V., & Ivohin, E. V. (2021). Formalizing the Procedure for the Formation of a Dynamic Equilibrium of Alternatives in a Multi-Agent Environment in Decision-Making by Majority of Votes. *Cybern Syst Anal*, *57*, 47–56. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00328-y

Oletsky, O., & Mahno, M. F. (2021). O povyshenii urovnya adekvatnosti v rezultatah processa ocenivaniya uchebnych proektov na osnove parametricheskoy relaksacii metoda parnych sravneniy. *Problemy upravleniya i informatiki*, *1*, 122–133 [in Russian].

Oletsky, O., & Tryhub, O. (2020). Pro zastosuvannia metodu analizu ierarhii dla avtomatyzovanogo ocinuvannia studentskyh robit. *Naukovi zapysky NaUKMA. Kompiuterni nauky*, *3*, 127–131 [in Ukrainian]. https://doi.org/10.18523/2617-3808.2020.3.127-131

Tryhub, O. S., Tryhub, R. O., & Gorborukov, V. (2013). Researching semistructured problems of multicriteria optimization using the software system. *Naukovi zapysky NaUKMA. Kompiuterni nauky*, *151*, 79–88.

O. Oletsky

USING RECTANGULAR STOCHASTIC MATRICES FOR THE PROBLEM OF EVALUATING AND RANKING ALTERNATIVES

The paper investigates the issue related to a possible generalization of the "state-probability of choice" model so that the generalized model could be applied to the problem of ranking alternatives, either individual or by a group of agents. It is shown that the results obtained before for the problem of multi-agent choice and decision making by majority of votes can be easily transferred to the problem of multi-agent alternatives ranking. On the basis of distributions of importance values for the problem of ranking alternatives, we can move on to similar models for the choice and voting with the help of well-known exponential normalization of rows.

So we regard two types of matrices, both of which belonging to the sort of matrices named balanced rectangular stochastic matrices. For such matrices, sums of elements in each row equal 1, and all columns have equal sums of elements. Both types are involved in a two-level procedure regarded in this paper. Firstly a matrix representing all possible distributions of importance among alternatives should be formed, and secondly a "state-probability of choice" matrix should be obtained on its base. For forming a matrix of states, which belongs and the rows of which correspond to possible distributions of importance, applying pairwise comparisons and the Analytic Hierarchy Method is suggested. Parameterized transitive scales with the parameter affecting the spread of importance between the best and the worst alternatives are regarded. For further getting the matrices of choice probabilities, another parameter which reflects the degree of the agent's decisiveness is also introduced. The role of both parameters is discussed and illustrated with examples in the paper.

The results are reported regarding some numerical experiments which illustrate getting distributions of importance on the basis of the Analytic Hierarchy Process and which are connected to gaining the situation of dynamic equilibrium of alternatives, i.e. the situation when alternatives are considered as those of equal value.

Keywords: ranking of alternatives, rectangular stochastic matrices, pairwise comparisons, Analytic Hierarchy Process, agents.

Матеріал надійшов 04.05.2021