УДК 004.82.855’24
DOI: 10.18523/2617-3808.2022.5.85-91

Олецький О. В.

ПІДВИЩЕННЯ УЗГОДЖЕНОСТІ МАТРИЦЬ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ У МЕТОДІ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ НА ОСНОВІ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розвинуто підхід до підвищення узгодженості матриць попарних порівнянь у методі аналізу ієрархій на основі розв’язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Одна група цих рівнянь відповідає оцінкам, які дав експерт, а інша група пов’язана з вимогою кардинальної узгодженості попарних порівнянь.

Методику проілюстровано на трьох прикладах: простий базовий приклад, в якому немає суттєвих неузгодженостей; неповна матриця попарних порівнянь; маніпулювання з боку недобросовісного експерта, що призводить до порушення порядку (для протидії такому маніпулюванню запропоновано вводити вагові коефіцієнти, які відображають міри довіри до тих чи тих суджень).

Ключові слова: ранжування альтернатив, метод аналізу ієрархій, попарні порівняння, підвищення узгодженості, системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

1. Вступ

Серед методів ранжування альтернатив і прийняття рішень на цій основі одне з провідних місць займає метод аналізу ієрархій (МАІ) [2; 8; 9; 15; 17 та ін.]. Він базується на матрицях попарних порівнянь (МПП), які можуть будуватися на різних рівнях ієрархії.

Нехай ми маємо n альтернатив, які утворюють множину $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. МПП – це $(n \times n)$-матриця $M = (m_{ij}, i, j = \overline{1, n})$, яка описує відношення переваг між альтернативами. Зазвичай приймають, що якщо i-та альтернатива краща за j-ту (позначають $a_i \succ a_j$), то $m_{ij} > 1$. Якщо альтернативи рівнозначні ($a_i \sim a_j$), то $m_{ij} = 1$. Якщо ж i-та альтернатива гірша за j-ту (позначається $a_i \prec a_j$), то $m_{ij} < 1$.

У найбільш типовому випадку МПП будуються експертним шляхом. Як правило, експерти не постулюють міри переваг як точні чисельні значення, а задають їх у словесній формі (незначна перевага, сильна перевага тощо). Для отримання чисельних значень можуть використовувати різні шкали, найбільш поширеною є стандартна шкала, запропонована Сааті [15] (1 – альтернативи рівноцінні, 3 – слабка перевага, 5 – помітна перевага, 7 – сильна перевага, 9 – вирішальна перевага; значення 2, 4, 6, 8 розглядають як проміжні).

Крім того, зазвичай приймають, що:

– всі діагональні елементи МПП дорівнюють 1 (змістовно це означає, що будь-яка альтернатива рівноцінна самій собі):

$$\forall i \ \ x_{ii} = 1$$

– МПП є обернено-симетричною, тобто

$$\forall i, j \ a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}.$$

На основі матриць попарних порівнянь оцінюють міри важливості альтернатив. Ми розглядаємо найпростіший випадок (по суті – однорівневий МАІ, коли альтернативи порівнюють у цілому, без явного залучення до розгляду їхніх ознак і критеріїв, які впливають на оцінки). Загалом мова йде про застосування деякої функції $u(\cdot)$, яка на основі МПП дає змогу отримати вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$; значення v_i розглядають як міру важливості i-ї альтернативи. Називатимемо таку функцію ранжувальною.

Ранжувальну функцію $u(\cdot)$ можна вибирати по-різному. Стандартним є підхід, за якого вектор оцінок v отримується як перронів вектор (тобто нормалізований головний власний вектор) матриці попарних порівнянь M. Позначимо таку функцію через $U^{(1)}$.

Як альтернативу можна розглядати функцію $U^{(2)}$, застосування якої зводиться до того, що v_i обчислюють як нормалізоване середнє геометричне елементів *i*-го рядка матриці *M*. Часто $U^{(2)}$ розглядають як деяку апроксимацію $U^{(1)}$.

Інколи буває зручно розглядати логарифмічне подання МПП; у цьому випадку в МПП фігурують не самі оцінки переваг, а їх логарифми за тією чи тією основою. Логарифмічне подання тісно пов'язане з транзитивними шкалами [5 та ін.], для яких наступна градація переваг більша за попередню в τ разів; τ – деяке задане число. Наприклад, якщо мінімальну градацію переваг оцінити як τ, то наступні градації будуть оцінюватися в τ^2, τ^3 і т. д.

Транзитивну шкалу з параметром τ називатимемо τ-транзитивною шкалою.

Тоді міру переваги однієї альтернативи над іншою можна оцінювати як цілочисельну кількість градацій між ними. Приміром, якщо перевагу 1-ї альтернативи над 2-ю оцінити як мінімальну (1 градація), а 2-ї над 3-ю як трохи більш сильну (2 градації), то матриця переваг у термінах градацій (у логарифмічному поданні) може мати вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Повну ж МПП у разі застосування τ-транзитивної шкали запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau^3 \\ \frac{1}{\tau} & 1 & \tau^2 \\ \frac{1}{\tau^3} & \frac{1}{\tau^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Більш загально, якщо c_{ij} – перевага *i*-го варіанта над *j*-м у термінах градацій, то відповідний елемент МПП при застосуванні τ-транзитивної шкали обчислюють як

$$m_{ij} = \tau^{c_{ij}}.$$

Побудовані в такий спосіб МПП будемо називати градаційними МПП.

Слід звернути увагу на те, що для МПП в логарифмічному поданні мають виконуватися співвідношення

$$\forall i \;\; c_{ii} = 0$$

(в логарифмічній шкалі 0 означає відсутність переваги, рівнозначність альтернатив);

$$\forall i,j \; c_{ij} = -c_{ji}.$$

Застосування τ-транзитивних шкал дає змогу спростити низку формул. Наприклад, якщо *C* – логарифмічне подання градаційної МПП для τ-транзитивної шкали, то функцію $U^{(2)}$ записують у вигляді

$$U^{(2)}(C) = (v_1, \dots, v_n),$$

$$v_i = \frac{\tau^{s_i}}{\sum_i \tau^{s_i}},$$

де

$$s_i = \frac{\sum_j c_{ij}}{n}$$

– середнє арифметичне елементів *j*-го рядка матриці *C*.

При побудові МПП виникає низка проблем, зокрема:

- помилки добросовісного експерта, спричинені об'єктивною складністю оцінювання;
- неповна матриця у випадку, якщо між собою порівнюються не всі альтернативи;
- свідоме маніпулювання – ситуація, коли з тією чи тією метою недобросовісний експерт формулює завідомо хибні для нього судження.

2. Проблема узгодженості МПП

Кажуть, що МПП *M* є кардинально узгодженою, якщо

$$\forall i,j,k \;\; m_{ij} = m_{ik} \cdot m_{kj}.$$

Кардинальну узгодженість можна також охарактеризувати як «ідеальну» узгодженість. Один із найпростіших показників, які характеризують узгодженості, – це індекс узгодженості [15]. Він дорівнює 0 для ідеально узгоджених МПП і зростає по мірі зростання неузгодженості.

Існує багато підходів до аналізу й підвищення узгодженості МПП [1; 3; 4; 6; 7; 10–14, 16–18 та ін.], однак вони мають здебільшого евристичний характер. Крім того, треба зазначити, що узгодженість МПП і якість експертних оцінок – це різні характеристики, і зв'язок між ними не є однозначним. Справді, для довільної МПП (якщо тільки вона додатна), навіть якщо експертні оцінки розставляли випадковим чином, ми можемо отримати її перронів вектор

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

та побудувати ідеально узгоджену МПП за формулою

$$m'_{ij} = \frac{v_i}{v_j}.$$

Перронові вектори обох МПП будуть однаковими.

МПП *M* є ординально узгодженою, якщо

$$\forall i,j,k \;\; m_{ij} > 1, m_{jk} > 1 \;\; \Rightarrow m_{ik} > 1.$$

Якщо прийняти, що МПП описує деяке відношення переваг, то ординальна узгодженість по суті означає транзитивність цього відношення.

Ще одним можливим видом неузгодженості є можливе порушення порядку. Порушення порядку в разі застосуванні ранжуючої функції u (·) має місце, якщо існують альтернативи a_i, a_j такі, що $a_i \succ a_j$ (тобто $m_{ij} > 1$), але

$$(u(M))_i < (u(M))_j.$$

Змістовно це означає, що відповідно до МПП i-та альтернатива оцінюється як краща за j-ту, але остаточна числова оцінка i-ї альтернативи виявляється гіршою за оцінку j-ї. Очевидно, така ситуація свідчить про серйозні суперечності в судженнях експерта (експертів).

Наведемо відомий приклад порушення порядку.

Будемо розглядати градаційну МПП із параметром τ = 1.5 (хоча в цьому контексті фактичне значення цього параметра не має суттєвого значення), яка в логарифмічній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що відповідно до експертних оцінок 1-й варіант має незначну перевагу над 2-м і 3-м, однак перевага 2-го варіанта над 3-м оцінюється як більш значна. Як зазначалося в [13], це може бути пов'язано зі свідомим маніпулюванням із боку експерта: він хоче забезпечити перемогу 2-го варіанта, але не хоче явно казати, що він краще за 1-й.

Повна МПП матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau \\ \frac{1}{\tau} & 1 & \tau^4 \\ \frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau^4} & 1 \end{pmatrix},$$

а її перронів вектор наближено дорівнює

0.3948 0.4519 0.1533.

2-а альтернатива перемагає.

Це й означає порушення порядку: відповідно до МПП 1-й варіант є кращим за 2-й, однак чисельна оцінка 2-го варіанта є більшою.

3. Система рівнянь для підвищення узгодженості МПП

Нехай експерт сформував МПП, і нехай c_{ij} – міра переваги i-ї альтернативи над j-ю в логарифмічній формі.

У [13] було проаналізовано можливість підвищення узгодженості МПП, пов'язану з безпосереднім розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно x_{ij}

$$x_{ij} = c_{ij},\ i,j = \overline{1,n} \tag{1}$$

$$\forall i,j,k \ \ x_{ik} + x_{kj} - x_{ij} = 0. \tag{2}$$

Можна вважати, що $c_{ii} = 0\ \forall\ i$; $c_{ij} = -c_{ji}\ \forall\ i, j$ (ситуації, коли це не так, можна вважати помилками, які легко виявити та усунути). Тоді групу рівнянь (2), очевидно, можна переписати у вигляді

$$\forall i,k > i, j > k \ \ x_{ik} + x_{kj} - x_{ij} = 0. \tag{3}$$

Група рівнянь (1) відповідає експертним судженням і утворює СЛАР із діагональною матрицею з очевидним розв'язком. Група (3) не залежить від експертних суджень і пов'язана з вимогами узгодженості, які можуть тією чи тією мірою суперечити експертним оцінкам (називати рівняння цієї групи еквідистантними). Загалом система (1)–(3) є перевизначеною; її розв'язок (псевдорозв'язок) можна отримати, наприклад, за допомогою псевдооберненої матриці Мура–Пенроуза.

Однак ми не зобов'язані розглядати повну систему. Деякі з рівнянь, що відповідають експертним судженням, можуть бути опущені (або ж МПП з самого початку була неповною й таких суджень взагалі не було). Тоді система (1)–(3) може стати недовизначеною.

Звернемо увагу на таку обставину. Якщо система несумісна, псевдообернена матриця Мура–Пенроуза дає змогу отримати псевдорозв'язок із мінімальною нормою нев'язки, що більш-менш логічно. Якщо ж система має безліч розв'язків, серед них буде вибрано розв'язок із мінімальною нормою, а доцільність вибору саме цього розв'язку може бути поставлено під сумнів.

Крім того, рівнянням можна надавати певні ваги, пов'язані з мірами довіри до відповідних суджень.

Унаслідок розв'язку системи рівнянь буде сформовано нову МПП з елементами

$$m'_{ij} = \tau^{x_{ij}},$$

доповнену на основі вимог оберненої симетричності.

Проілюструємо деякі типові випадки. Скрізь для визначеності братимемо τ = 1.5.

4. Базовий приклад

Розглянемо наступну МПП у логарифмічній формі

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цій МПП немає нічого незвичного. Вона ілюструє типову ситуацію, коли перевагу 1-ї альтернативи над 2-ю та 3-ю оцінюють як мінімально можливу. Ні порушень транзитивності, ні порушень порядку немає. Однак вимога кардинальної узгодженості все ж таки не виконується.

Індекс узгодженості МПП $M^{(2)}$ приблизно дорівнює *0.0091*.

Для такої МПП система (1)–(3) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 1 \\ x_{12} + x_{23} - x_{13} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок такої системи дорівнює

$$x_{12} = 0.75, \qquad x_{23} = 1.25, \qquad x_{13} = 0.75$$

і, відповідно, отримуємо скориговану МПП

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \tau^{0.75} & \tau^{1.25} \\ \frac{1}{\tau^{-0.75}} & 1 & \tau^{0.75} \\ \frac{1}{\tau^{-1.25}} & \frac{1}{\tau^{-0.75}} & 1 \end{pmatrix}$$

з індексом узгодженості 5.70E-4. Отже, процедура справді підвищила узгодженість МПП.

Однак слід звернути увагу на те, в результаті такого підвищення узгодженості МПП перронів вектор не змінюється. І для $M^{(1)}$, і для $M^{(2)}$ він приблизно дорівнює

$$0.4263 \quad 0.3254 \quad 0.2483.$$

5. Неповна МПП

Дослідження ситуації, коли наявні не всі попарні порівняння, почнемо з випадку, коли попарних порівнянь взагалі немає.

Якщо *n = 3* (3 альтернативи), маємо лише одне еквідистантне рівняння:

$$x_{12} + x_{23} - x_{13} = 0.$$

Ця система, очевидно, сумісна. Зокрема, вона має очевидний розв'язок

$$x_{12} = 0, x_{23} = 0, x_{13} = 0.$$

Це цілком логічно: якщо у нас немає ніякої інформації, у нас немає підстав віддавати перевагу будь-якій альтернативі над іншими.

Нехай тепер додається порівняння 1-ї та 2-ї альтернатив:

$$c_{12} = 1.$$

У результаті отримуємо СЛАР

$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{12} + x_{23} - x_{13} = 0. \end{cases}$$

Формально ми можемо отримати псевдорозв'язок Мура–Пенроуза:

$$x_{12} = 1, x_{23} = -0.5, x_{13} = 0.5.$$

Однак можна піти іншим шляхом і міркувати на основі деяких логічних побудов. Справді, на основі описаної інформації ми можемо розглядати дві альтернативи:

- 1-а та 3-я альтернативи рівноцінні;
- 2-а та 3-я альтернатива рівноцінні.

Виникає деяке розгалуження; у складніших випадках за умов неповної інформації можна розглядати дерево або граф можливих варіантів. З окремими гілками цього дерева будуть пов'язуватися відповідні рівняння; загалом така система рівнянь, найпевніше, буде несумісною; ця несумісність буде пов'язана з наявністю суперечливих гіпотез. Таку систему можна розв'язувати на основі псевдооберненої матриці. Крім того, окремим рівнянням можна надавати вагові коефіцієнти, які відображати міру впевненості у тій чи тій гіпотезі.

Проілюструємо можливість, пов'язану з застосуванням вагових коефіцієнтів із метою протидії можливим маніпуляціям.

6. Застосування вагових коефіцієнтів

Повернемося до прикладу з розділу 2 (порушення порядку). МПП у логарифмічній формі має вигляд

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми казали, що така МПП може бути пов'язана з маніпулятивним характером оцінки експерта: він не хоче явно постулювати перевагу 2-ї альтернативи, але хоче досягти її перемоги.

Індекс узгодженості $M^{(1)}$ приблизно дорівнює 0.1497.

СЛАР для підвищення узгодженості матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{13} = 1 \\ x_{23} = 4 \\ x_{12} + x_{23} - x_{13} = 0. \end{cases}$$

Її псевдорозв'язок дорівнює

$$x_{12} = 0, \ x_{23} = 3, \ x_{13} = 2.$$

Індекс узгодженості для МПП, побудованої на основі цього псевдорозв'язку, приблизно дорівнює 0.0091. Він справді знизився порівняно з початковою МПП, однак із погляду протидії маніпуляціям це нічого не дає. Ми просто побудували МПП, більш узгоджену з судженнями експерта (можливо, маніпулятивними).

Як і в попередньому розділі, ми можемо прийняти одну з двох гіпотез:

– підтримати експерта й вважати, що 2-га альтернатива краща за 1-шу;
– не підтримати та вважати, що перша альтернатива краща.

У першому випадку ми маємо залишити все так, як є, або підсилити роль свідчень на користь 2-ї альтернативи, у другому – навпаки. Це можна зробити за рахунок введення вагових коефіцієнтів.

Нехай ми прийняли рішення, що 1-ша альтернатива таки краща (врешті-решт, саме це було безпосередньо постульовано експертом). Це означає, що ми маємо збільшити ваговий коефіцієнт для рівняння $x_{12} = 1$ порівняно з коефіцієнтом для рівняння $x_{23} = 4$ (змістовно це означає, що одному судженню ми довіряємо більше, ніж іншому).

Візьмемо для рівнянь системи () вагові коефіцієнти відповідно (2., 1., 0.5, 1.). Отримаємо псевдорозв'язок

$$x_{12} = 0.4740,\ x_{23} = 1.3564,\ x_{13} = 1.4152.$$

Перронів вектор для МПП, утвореної на основі цього псевдорозв'язку, дорівнює

$$0.4157 \quad 0.3628 \quad 0.2214.$$

Тепер перемагає 1-ша альтернатива.

7. Висновки та обговорення

У статті розглянуто проблему підвищення узгодженості матриць попарних порівнянь, які будують на основі суджень експертів. При цьому слід враховувати як неминучі неузгодженості, пов'язані з об'єктивною складністю оцінювання, так і можливість свідомого маніпулювання з боку експертів. Особливу увагу при цьому треба приділяти порушенням порядку – ситуаціям, коли в матриці попарних порівнянь *i*-та альтернатива краща за *j*-ту, але в підсумку *j*-та альтернатива отримує вищу оцінку. Слід розглядати також ситуацію, коли матриця попарних порівнянь є неповною. Крім того, треба розрізняти питання узгодженості матриць попарних порівнянь та якості експертних оцінок, – зв'язок між ними є досить неоднозначним.

Запропоновано підхід до підвищення узгодженості, що ґрунтується на системі лінійних алгебраїчних рівнянь (1)–(3). Група рівнянь (1) відповідає судженням експерта, а група (3) – це вимоги кардинальної узгодженості. На основі розв'язку системи рівнянь можна отримати нову, більш узгоджену матрицю попарних порівнянь. Саму матрицю попарних порівнянь при цьому має бути подано в логарифмічній формі. Застосовано транзитивні шкали.

Наведено три ілюстративні приклади. Перший приклад є базовим. Він ілюструє ситуацію, коли кардинальної узгодженості немає, але і принципових суперечностей немає. У результаті розв'язання СЛАР просто будується більш узгоджена матриця. Другий приклад ілюструє послідовне поповнення множини наявних попарних порівнянь. Показано, що при цьому можуть виникати розгалуження, що утворюють дерево або граф можливих варіантів. У третьому прикладі наявна маніпуляція, яка призводить до порушення порядку. Експерт хоче забезпечити перемогу однієї з альтернатив, однак не бажає явно визнавати, що вона краща за іншу. Показано, як можна протидіяти подібним маніпуляціям на основі введення вагових коефіцієнтів, що відображають міру довіри до тих чи тих суджень.

Список літератури

1. Barzilai J. Consistency measures for pairwise comparison matrices / J. Barzilai // J. Multi-Criteria Decis. Anal. – 1998. – Vol. 7. – Pp. 123–132.
2. Brunelli M. Introduction to the Analytic Hierarchy Process / M. Brunelli. – Springer, Cham, 2015.
3. Brunelli M. Recent Advances on Inconsistency Indices for Pairwise Comparisons / M. Brunelli // A Commentary. Fundam. Inform. – 2016. – Vol. 144. – Pp. 321–332.
4. Cavallo B. A general unified framework for pairwise comparison matrices in multicriterial methods / B. Cavallo, L. D'Apuzzo // Int. J. Intell. Syst. – 2009. – Vol. 24. – Pp. 377–398.
5. Choo E. A Common Framework for Deriving Preference Values from Pairwise Comparison Matrices / E. Choo, W. Wedley // Comput. Oper. Res. – 2004. – Vol. 31(6). – Pp. 893–908.
6. Choo E. Estimating ratio scale values when units are unspecified / E. Choo, W. Wedley // Computers and Industrial Engineering. – 2010. – Vol. 59. – Pp. 200–208. https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.04.001
7. Grzybowski A. Z. New results on inconsistency indices and their relationship with the quality of priority vector estimation / A. Z. Grzybowski // Expert Syst. Appl. – 2016. – Vol. 43. – Pp. 197–212.
8. Ho W. Integrated analytic hierarchy process and its applications. A literature review / W. Ho // European Journal of Operational Research. – 2008. – Vol. 186 (1). – Pp. 211–228.
9. Ishizaka A. Review of the main developments in the analytic hierarchy process / A. Ishizaka, A. Labib // Expert Syst. Appl. – 2011. – Vol. 38. – Pp. 14336–14345.
10. Koczkodaj W. On axiomatization of inconsistency indicators for pairwise comparisons / W. Koczkodaj, R. Szwarc // Fundam. Inform. – 2014. – Vol. 132. – Pp. 485–500.
11. Koczkodaj W. The limit of inconsistency reduction in pairwise comparisons / W. Koczkodaj, J. Szybowski // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – 2016. – Vol. 26. – Pp. 721–729.
12. Mikhailov L. Improving the Ordinal Consistency of Pairwise Comparison Matrices / L. Mikhailov, S. Siraj // Proceedings of the

XI International Symposium for the Analytic Hierarchy Process ISAHP-2011. – 2011. https://doi.org/ 10.13033/isahp.y2011.128
13. Oletsky O. On Constructing Adjustable Procedures for Enhancing Consistency of Pairwise Comparisons on the Base of Linear Equations / O. Oletsky // CEUR Workshop Proceedings. – 2021. – Vol. 3106. – Pp. 177–185.
14. Potomkin M. M. Improvement of Analytic Hierarchy Process based on the Refinement of the Procedures for the Formation of Pairwise Comparison Matrices / M. M. Potomkin, M. V. Nikolaienko, D. I. Grazion // Cybern. Syst. Anal. – 2020. – Vol. 56. – Pp. 603–610. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00277-y
15. Saaty T. L. The Analytic Hierarchy Process / T. L. Saaty. – McGraw-Hill, New York, 1980.
16. Tsyganok V. V. Usage of Scales with Different Number of Grades for Pair Comparisons in Decision Support Systems / V. V. Tsyganok, S. V. Kadenko, O. V. Andriichuk // International Journal of the Analytic Hierarchy Process. – 2016. – Vol. 8 (1). – Pp. 112–130. https://doi.org/10.13033/ijahp.v8i1.259
17. Vaidya O. S. Analytic hierarchy process: An overview of applications / O. S. Vaidya, S. Kumar // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 169 (1). – Pp. 1–29.
18. Yu O. Assessing and Improving Consistency of a Pairwise Comparison Matrix in the Analytic Hierarchy Process / O. Yu // Portland International Conference on Management of Engineering and Technology. – 2017. – Pp. 1–6. https://doi.org/ 10.23919/PICMET.2017.8125304

References

Barzilai, J. (1998). Consistency measures for pairwise comparison matrices. *J. Multi-Criteria Decis. Anal*, *7*, 123–132.

Brunelli, M. (2015). *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*, Springer, Cham.

Brunelli, M. (2016). Recent Advances on Inconsistency Indices for Pairwise Comparisons. *A Commentary. Fundam. Inform.*, *144*, 321–332.

Cavallo, B., & D'Apuzzo, L. (2009). A general unified framework for pairwise comparison matrices in multicriterial methods. *Int. J. Intell. Syst.*, *24*, 377–398.

Choo, E., & Wedley, W. (2004). A Common Framework for Deriving Preference Values from Pairwise Comparison Matrices. *Comput. Oper. Res.*, *31* (6), 893–908.

Choo, E., & Wedley, W. (2010). Estimating ratio scale values when units are unspecified. *Computers and Industrial Engineering*, *59*, 200–208. https://doi.org/10.1016/j.cie.2010.04.001

Grzybowski, A. Z. (2016). New results on inconsistency indices and their relationship with the quality of priority vector estimation. *Expert Syst. Appl*, *43*, 197–212.

Ho, W. (2008). Integrated analytic hierarchy process and its applications. A literature review. *European Journal of Operational Research*, *186* (1), 211–228.

Ishizaka, A., & Labib, A. (2011). Review of the main developments in the analytic hierarchy process. *Expert Syst. Appl.*, *38*, 14336–14345.

Koczkodaj, W., & Szwarc, R. (2014). On axiomatization of inconsistency indicators for pairwise comparisons. *Fundam. Inform.*, *132*, 485–500.

Koczkodaj, W., & Szybowski, J. (2016). The limit of inconsistency reduction in pairwise comparisons. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, *26*, 721–729.

Mikhailov, L., & Siraj, S. (2011). Improving the Ordinal Consistency of Pairwise Comparison Matrices. *Proceedings of the XI International Symposium for the Analytic Hierarchy Process ISAHP-2011*. https://doi.org/10.13033/isahp.y2011.128

Oletsky, O. (2021). On Constructing Adjustable Procedures for Enhancing Consistency of Pairwise Comparisons on the Base of Linear Equations. *CEUR Workshop Proceedings, 3106*, 177–185.

Potomkin, M. M., Nikolaienko, M. V., & Grazion, D. I. (2020). Improvement of Analytic Hierarchy Process based on the Refinement of the Procedures for the Formation of Pairwise Comparison Matrices. *Cybern. Syst. Anal.*, *56*, 603–610. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00277-y

Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.

Tsyganok, V. V., Kadenko, S. V., & Andriichuk, O. V. (2016). Usage of Scales with Different Number of Grades for Pair Comparisons in Decision Support Systems. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process*, *8* (1), 112–130. https://doi.org/10.13033/ijahp.v8i1.259

Vaidya, O. S., & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, *169* (1), 1–29.

Yu, O. (2017). Assessing and Improving Consistency of a Pairwise Comparison Matrix in the Analytic Hierarchy Process. *Portland International Conference on Management of Engineering and Technology*, 1–6, https://doi.org/10.23919/PICMET.2017.8125304

O. Oletsky

ENHANCING CONSISTENCY OF PAIRWISE COMPARISONS ON THE BASE OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

A problem of improving consistency of pairwise comparisons matrices in application to ranking given alternatives is considered in the paper. But it can be shown that consistency is not the only issue as to the quality of pairwise comparisons. Given an arbitrary positive square matrix, we can obtain an ideally consistent pairwise comparison matrix with the same Perronian vector. Therefore, the quality of experts' judgements is an issue of great importance as well.

Technically, an approach to improving consistency of pairwise comparisons on the basis of solving a linear algebraic equations system is suggested. The system contains two groups of equations. One of them represents experts' judgments, and the other is related to demands of cardinal consistency. Such a system can be over- or maybe underdetermined, and it typically can be inconsistent. Then a pseudo-solution can be obtained by means of pseudo-inverse Moore-Penrose matrix.

For improving the quality of pairwise comparisons, it appears urgent to take into account reliabilities of certain judgements by giving them appropriate weight coefficients.

Some numerical examples are provided in the paper. The first is a simple basic example without any serious inconsistencies. The second illustrates as to treat incomplete pairwise comparison matrices. And the latest illustrates possible expert's manipulation, when an expert wants to secure the winning of a certain alternative whereas they don't want to postulate the advantage of this alternative implicitly, and this results in the order violation. It is illustrated how introducing weight coefficients of equations can help counteract such manipulations.

Keywords: ranking of alternatives, Analytic Hierarchy Process, pairwise comparisons, enhancing consistency, linear algebraic equations.

Матеріал надійшов 08.08.2022