УДК 519.85
DOI: 10.18523/2617-3808.2022.5.92-96

Стецюк П. І., Хом'як О. М., Ляшко В. І.

ДВОЕТАПНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З НЕВІДОМИМИ ПОТРЕБАМИ СПОЖИВАЧІВ

Досліджено математичну модель двоетапної транспортної задачі з невідомими потребами споживачів та заданими їхніми нижніми й верхніми межами. Її частковим випадком є класична двоетапна транспортна задача, яка визначає найбільш економічний план перевезення продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти. Наведено умови сумісності систем лінійних обмежень відповідних задач лінійного програмування. Розглянуто модельну задачу оптимального розбиття множини та наведено результати обчислювальних експериментів із використанням солвера Gurobi.

Ключові слова: двоетапна транспортна задача, задача лінійного програмування, Gurobi, оптимальне розбиття множини.

Вступ

У роботі [2] досліджено методи розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з заданими положеннями центрів підмножин. Ця задача характеризується наявністю двох етапів і полягає у визначенні зон збирання неперервно розподіленого ресурсу (сировини) підприємствами першого етапу й обсягів перевезень переробленого продукту від підприємств першого етапу до споживачів (пунктів другого етапу) з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування ресурсу від постачальників через пункти перероблення (збирання, зберігання) до споживачів.

Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу є розширенням класичної двоетапної транспортної задачі [1; 3; 4], де вантаж (продукція) перевозиться від постачальників до споживачів тільки через проміжні пункти – посередницькі фірми та різноманітні сховища (склади).

Нижче опишемо математичну модель двоетапної транспортної задачі для знаходження найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції, де потреби споживачів невідомі та враховують обмеження на нижні й верхні їхні межі. Покажемо зв'язок побудованої моделі з двоетапною неперервно-дискретною задачею оптимального розбиття-розподілу.

Матеріал статті викладено в такому порядку. У розділі 1 описано двоетапну транспортну задачу з невідомими потребами споживачів і наведено умови сумісності системи лінійних обмежень. У розділі 2 описано модельну задачу оптимального розбиття неперервної області та подано результати обчислювальних експериментів із різною дискретизацією прямокутної області.

1. Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів

Нехай у m пунктах постачання A_1, ..., A_m є a_1, ..., a_m одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів B_1, ..., B_n. Обсяги потреб споживачів будемо вважати невідомими, а їхні нижні межі b_1^{low}, ..., b_n^{low} та верхні межі b_1^{up}, ..., b_n^{up} вважатимемо заданими. Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів D_1, ..., D_l. Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j, та відповідні оптимальному плану потреби споживачів.

Нехай $x = \left\{x_{ik}\right\}_{i=1,\dots,m}^{k=1,\dots,l}$, де x_{ik} – кількість одиниць продукції, яку перевозять від постачальника A_i до пункту D_k; $y = \left\{y_{kj}\right\}_{k=1,\dots,l}^{j=1,\dots,n}$, де y_{kj} – кількість продукції від пункту D_k до споживача B_j; $z = \left\{z_j\right\}_{j=1,\dots,n}$, де z_j – кількість продукції, яку постачають споживачеві B_j.

Двоетапна транспортна задача, яка визначає найбільш економічний план перевезення продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти та відповідні оптимальному плану потреби споживачів, має такий вигляд. Знайти

$$f_{xyz}^* = f\left(x^*, y^*, z^*\right) = \tag{1}$$

$$= \min_{x,y}\left\{ f\left(x,y,z\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = z_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0,\ k = \overline{1,l}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{5}$$

$$b_j^{low} \le z_j \le b_j^{up}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$x_{ik} \ge 0, y_{kj} \ge 0, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,l}, j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Усюди надалі вважатимемо, що $m \ge 2$, $n \ge 2$, $l \ge 2$, і окрім того $a_i > 0$, $b_j^{up} \ge b_j^{low} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, оскільки у протилежному випадку задача занадто спрощується і, зокрема, як випливає із (2) – (7), частина змінних x_{ik}, y_{kj}, z_j, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,l}$, $j = \overline{1,n}$, приймає нульові значення і може бути вилучена із подальшого розгляду.

Задача (1) – (7) є задачею лінійного програмування (ЛП-задача), яка містить $m \times l + n \times (l + 1)$ неперервних змінних x, y та z, $m + 3n + l + 1$ лінійних обмежень. Цільова функція $f(x, y, z)$ задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів. Обмеження (2) означають транспортування a_1, ..., a_m одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) – що споживачам потрібно доставити невідомі об'єми z_1, ..., z_n одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (4) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам. Обмеження (5) задає умову на те, щоб сумарна продукція постачальників дорівнювала сумарній продукції виробників. Обмеження (6) задає нижні та верхні межі на невідомі потреби споживачів.

Задача (1) – (7) належить до збалансованих задач транспортного типу, тобто вся продукція постачальників має бути доставлена споживачам, не залишаючи нічого в проміжних пунктах. Це диктує умови на сумісність системи обмежень (2) – (7) – системи лінійних рівностей. Правильним є таке твердження.

Твердження 1. *Система обмежень (2) – (7) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \le \sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j^{up}. \tag{8}$$

Варто зазначити, що умова (8) означає, що обмеження (2) – (5) є лінійно залежними та одну з рівностей в обмеженнях (2) і (4) може бути вилучено, причому довільну.

Якщо $b_j^{low} = b_j^{up} = b_j$, $j = \overline{1,n}$, то задача (1) – (7) переходить у класичну двоетапну транспортну задачу, яка визначає найбільш економічний план перевезення продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти й має такий вигляд. Знайти

$$f_{xy}^* = f\left(x^*, y^*\right) =$$

$$= \min_{x,y}\left\{ f\left(x,y\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \tag{9}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0,\ k = \overline{1,l}, \tag{12}$$

$$x_{ik} \ge 0, y_{kj} \ge 0, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,l}, j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Задача (9) – (13) є ЛП-задачею, яка містить $(m + n) \times l$ неперервних змінних x та y, $m + n + l$ лінійних обмежень. Цільова функція $f(x, y)$ задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів. Обмеження (10) означають транспортування a_1, ..., a_m одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (11) – що споживачам потрібно доставити необхідні обсяги a_1, ..., a_n одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (12) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Задача (9) – (13) належить до збалансованих задач транспортного типу, тобто вся продукція постачальників має бути доставлена споживачам, не залишаючи нічого в проміжних пунктах. Правильним є таке твердження.

Твердження 2 [1; 5]. *Система обмежень (10) – (13) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{14}$$

Рівність (14) означає, що обмеження (10) – (13) є лінійно залежними та одну довільну рівність з обмежень (10), (11) та (12) може бути вилучено.

2. Модельна задача оптимального розбиття множини

Розглянемо застосування задачі (1) – (7) до модельної задачі оптимального розбиття множини, описаної в роботі [2]. Деякий постачальник однорідного ресурсу (сировини), неперервно розподілений зі щільністю $\rho(x) = 1$ в області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \le x^{(1)} \le 1,\ 0 \le x^{(2)} \le 1\}$, постачає його в п'ять пунктів (першого етапу) для первинного перероблення або зберігання. Задано координати $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$, $i = \overline{1,5}$, розташування цих пунктів: $\tau_1^I = (0{,}2;\ 0{,}2)$, $\tau_2^I = (0{,}3;\ 0{,}5)$, $\tau_3^I = (0{,}8;\ 0{,}3)$, $\tau_4^I = (0{,}6;\ 0{,}8)$, $\tau_5^I = (0{,}6;\ 0{,}1)$. Задано також координати $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \tau_j^{II(2)})$, $j = \overline{1,3}$, пунктів (другого етапу) споживання ресурсу, що був перероблений (зберігався) в пунктах першого етапу: $\tau_1^{II} = (0{,}2;\ 0{,}8)$, $\tau_2^{II} = (0{,}6;\ 0{,}4)$, $\tau_3^{II} = (0{,}8;\ 0{,}7)$.

Вартість транспортування одиниці ресурсу від постачальника з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ до пункту першого етапу з координатами $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$ задано у вигляді $c_i^I(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^I) = \sqrt{\left(x^{(1)} - \tau_i^{I(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)} - \tau_i^{I(2)}\right)^2}$, $i = \overline{1,5}$.

Затрати на транспортування одиниці продукції з i-го пункту першого етапу $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)})$ до пункту другого етапу $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \tau_j^{II(2)})$ задано у вигляді $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) = \sqrt{\left(\tau_i^{I(1)} - \tau_j^{II(1)}\right)^2 + \left(\tau_i^{I(2)} - \tau_j^{II(2)}\right)^2}$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$.

Потрібно розбити множину Ω постачальників ресурсу на сфери їх обслуговування в п'яти пунктах першого етапу, тобто на підмножини $\Omega_1, ..., \Omega_i$, $\bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i = \Omega$, $i = \overline{1,5}$, і визначити обсяги перевезень $v_{ij} \ge 0$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$, від пунктів першого етапу τ_i^I, $i = \overline{1,5}$ до пунктів споживання другого етапу τ_j^{II}, $j = \overline{1,3}$, так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників до пунктів первинного перероблення (першого етапу) і доставлення переробленого ресурсу до пунктів кінцевого споживання (другого етапу):

$$F\left(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_5\},\ \{v_{11}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{53}\}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{5} \int_{\Omega_i} c_i^I\left(x, \tau_i^I\right) \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) v_{ij} \to \min \tag{15}$$

і при цьому весь перероблений продукт зі всіх пунктів першого етапу необхідно вивезти в пункти другого етапу

$$\sum_{j=1}^{3} v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x)\, dx,\ i = \overline{1,5}, \tag{16}$$

причому попит у всіх пунктах другого етапу потрібно задовольнити

$$\sum_{j=1}^{5} v_{ij} = b_j^{II},\ j = \overline{1,3}, \tag{17}$$

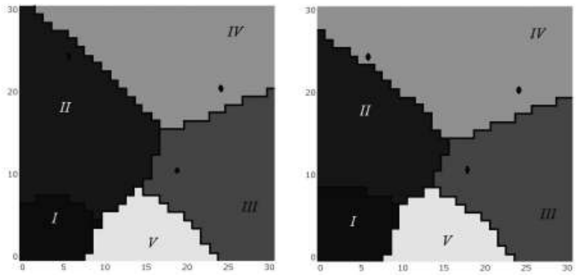
і має виконуватись умова балансу

$$\sum_{i=1}^{5} \int_{\Omega} \rho(x)\, dx = \sum_{j=1}^{3} b_j^{II}. \tag{18}$$

Дискретний аналог задачі (15) – (18) легко описати за допомогою задачі (1) – (7), де постачальниками є m ділянок із дискретного розбиття області Ω, споживачами є три пункти другого етапу, а проміжними пунктами – п'ять пунктів першого етапу. Вартість транспортування одиниці продукції від постачальників до проміжних пунктів і від проміжних пунктів до споживачів визначають як евклідову відстань між точками, що їм відповідають. Якщо обсяги ресурсу постачальників вибрати пропорційними площам ділянок, а обсяги ресурсів у пунктах кінцевого споживання вважати заданими, то розв'язок задачі (1) – (7) буде відповідати одному з варіантів оптимального розбиття множини Ω постачальників ресурсу з точністю до вибраної дискретизації ділянок.

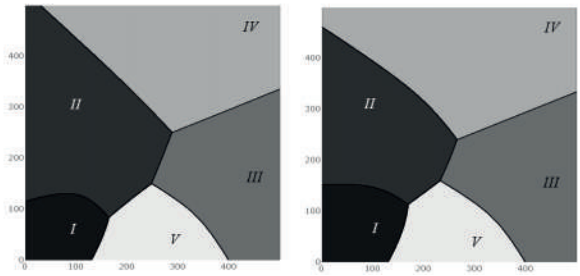
Було розглянуто розбиття Ω на квадратні ділянки, кількість яких визначає розміри задачі (1) – (7) і час, затрачений на її виконання. Для першого випадку розглянуто сітку 31 × 31. На рис. 1 наведено оптимальне розбиття множини Ω постачальників однорідного ресурсу на підмножини Ω_1, ..., Ω_5 з обсягами виробництва 0.0686785; 0.3; 0.23975; 0.3; 0.0915713 та обсягами споживання у пунктах другого етапу 0.3; 0.4; 0.3 (рис. 1, а), з обсягами виробництва 0.0832466; 0.220604; 0.238293; 0.361082; 0.0967742 та обсягами споживання у пунктах другого етапу 0.220604; 0.418314; 0.361082 відповідно (рис. 1, *б*).

Для розбиття з рис. 1, *а* та рис. 1, *б* ЛП-задачі (1) – (7) мають 4823 змінні та 970 лінійних обмежень. Їх розв'язували за допомогою солвера Gurobi менше ніж секунду. В результаті було



а *б*

Рис. 1. Оптимальне розбиття області Ω для сітки 31 × 31 з обсягами споживання у пунктах другого етапу: 0.3; 0.4; 0.3 (*а*); 0.220604; 0.41831; 0.361082 (*б*)



а *б*

Рис. 2. Оптимальне розбиття області Ω для сітки 500 × 500 з обсягами споживання у пунктах другого етапу: 0.3; 0.4; 0.3 (*а*); 0.22896; 0.428868; 0.342172 (*б*)

знайдено оптимальні плани перевезення переробленого продукту з *i*-го, $i = \overline{1,5}$, пункту першого етапу в *j*-й, $j = \overline{1,3}$, пункт другого етапу. План перевезення $v_{\grave{a}}$ відповідає оптимальному розбиттю з рис. 1, *а*, план перевезення $v_{\acute{a}}$ – оптимальному розбиттю з рис. 1, *б*:

$$v_{\grave{a}} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0686785 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.23975 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.0915713 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$v_{\acute{a}} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0832466 & 0.0000 \\ 0.220604 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.238293 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.361082 \\ 0.0000 & 0.0967742 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Для другого випадку розглянуто сітку 500 × 500. На рис. 2 наведено оптимальне розбиття на підмножини Ω_1, ..., Ω_5 з обсягами виробництва 0.07418; 0.3; 0.226712; 0.3; 0.099108 та обсягами споживання у пунктах другого етапу 0.3; 0.4; 0.3 відповідно (рис. 2, *а*), з обсягами виробництва 0.09066; 0.22896; 0.232524; 0.342172; 0.105684 та обсягами споживання у пунктах другого етапу 0.22896; 0.428868; 0.342172 відповідно (рис. 2, *б*).

Для розбиття з рис. 2, *а* та рис. 2, *б* ЛП-задачі (1) – (7) мають 1 250 018 змінних і 250 009 лінійних обмежень. Їх розв'язували за допомогою солвера Gurobi за декілька секунд. В результаті було знайдено оптимальні плани перевезення переробленого продукту з *i*-го, $i = \overline{1,5}$, пункту першого етапу в *j*-й, $j = \overline{1,3}$, пункт другого етапу.

План перевезення $v_{\grave{a}}$ відповідає оптимальному розбиттю з рис. 2, *а*, план перевезення $v_{\acute{a}}$ – оптимальному розбиттю з рис. 2, *б*:

$$v_{\grave{a}} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.07418 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.226712 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.099108 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$v_{\acute{a}} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.09066 & 0.0000 \\ 0.22896 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.232524 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.342172 \\ 0.0000 & 0.105684 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Висновки

У статті досліджено математичну модель лінійного програмування для двоетапної транспортної задачі з невідомими потребами споживачів та заданими їхніми нижніми і верхніми межами. Наведено умови існування розв'язку відповідної задачі лінійного програмування. Розглянуто приклади застосування побудованої моделі до задачі оптимального розбиття множини з дискретизацією прямокутної області $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \le x^{(1)} \le 1,\ 0 \le x^{(2)} \le 1\}$ рівномірними сітками 31 × 31 і 500 × 500. Наведено результати обчислювальних експериментів із використанням солвера Gurobi для розв'язання задач лінійного програмування, де максимальна кількість змінних дорівнює 1 250 018, а максимальна кількість обмежень – 250 009. Середній час, витрачений солвером Gurobi на розв'язання цих задач, становить декілька секунд на сучасних ПЕОМ.

Список літератури

1. Карагодова О. О. Дослідження операцій : навч. посіб. / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок. – Київ : Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.
2. Киселева Е. М. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств / Е. М. Киселева, О. М. Притоманова, С. А. Ус. // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – № 1. – С. 3–15.
3. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2003. – 452 с.

4. Стецюк П. І. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація / П. І. Стецюк, В. І. Ляшко, Г. В. Мазютинець // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2018. – Т. 1. – С. 14–20.
5. Стецюк П. І. Модифікації двоетапної транспортної задачі та їх застосування / П. І. Стецюк, В. О. Стовба, С. С. Трегубенко, О. М. Хом'як // Кібернетика та системний аналіз. – 2022. – Т. 58, № 6. – С. 54–70.

References

Karahodova, O. O., Kihel, V. R., & Rozhok, V. D. (2007). *Doslidzhennia operatsii*. Tsentr uchbovoi literatury [in Ukrainian].

Kiseleva, Å. Ì., Prytomanova, O. M., & Us, S. A. (2020). Solving a Two-Stage Continuous-Discrete Problem of Optimal Partition-Allocation with a Given Position of the Centers of Subsets. *Cybern. Syst. Anal.*, *56*, 1–12 [in Russian]. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00215-y

Nakonechnyi, S. I., & Savina, S. S. (2003). *Matematychne prohramuvannia*. KNEU [in Ukrainian].

Stetsyuk, P. I., Lyashko, V. I., & Mazyutynets, G. V. (2018). Dvoetapna transportna zadacha ta yii AMPL-realizatsiia. *Naukovi zapysky NaUKMA. Kompiuterni nauky*, *1*, 14–20 [in Ukrainian].

Stetsyuk, P. I., Stovba, V. O., Trehubenko, S. S., & Khomiak, O. M. (2022). Modyfikatsii dvoetapnoi transportnoi zadachi ta yikh zastosuvannia. *Kibernetyka ta systemnyi analiz*, *58* (6), 54–70 [in Ukrainian].

P. Stetsyuk, O. Khomiak, V. Lyashko

TWO-STAGE TRANSPORTATION PROBLEM WITH UNKNOWN CONSUMER DEMANDS

The work investigates a mathematical model of a two-stage transportation problem for finding the most economical plan for the transportation of homogeneous products from suppliers to consumers, where the demands of consumers are unknown, taking into account constraints on their lower and upper bounds. It is an extension of the classic two-stage transportation problem, where products are transported from suppliers to consumers only through intermediate points. Intermediary firms and various storage facilities (warehouses) can be such intermediate points.

The relationship of the developed mathematical model with the two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-distribution, which is characterized by the presence of two stages, is investigated. The problem consists in determining the areas of collection of the continuously distributed resource (raw material) by enterprises of the first stage and the volumes of transportation of the processed product from the enterprises of the first stage to consumers (points of the second stage), in order to minimize the total costs of transportation of the resource from suppliers to consumers through processing points (collection points, storage points).

The material of the article is presented in two sections. Section 1 describes the mathematical model of the two-stage transportation problem with unknown consumer demands and provides the necessary and sufficient conditions for the compatibility of the system of linear constraints. It is shown that its special case coincides with the classic two-stage transportation problem.

Section 2 provides a description of the model problem of optimal partitioning-distribution for the continuous area Ω *and the discrete analog of the model problem. The results of computational experiments for a rectangular area* $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) : 0 \le x^{(1)} \le 1,\ 0 \le x^{(2)} \le 1\}$ *with discretizations by grids* 31×31 *and* 500×500 *are presented. Optimal plans for transportation of processed product from points of the first stage to points of the second stage for both grids were found. The average time spent by the Gurobi solver to solve problems for the second grid, where the number of variables equals 250018 and the number of constraints equals 250009, is a few seconds on modern PCs.*

Keywords: two-stage transportation problem, linear programming problem, Gurobi, optimal set partition.

Матеріал надійшов 15.09.2022