УДК 004.82.855'24
DOI: 10.18523/2617-3808.2023.6.4-10

Олецький О. В., Франчук І. О., Гуминський В. В.

ПРО ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ ДВОРІВНЕВОЇ МОДЕЛІ «СТАН–ІМОВІРНІСТЬ ДІЇ» НА ОСНОВІ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ ТА МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

У рамках підходу до моделювання процесів, пов'язаних із недетермінованим прийняттям рішень на основі моделі «стан–імовірність дії», запропоновано підхід до побудови матриць «стан–імовірність дії», що базується на попарних порівняннях. Розглянуто вибір між двома альтернативами на основі розгляду багатьох критеріїв, які можуть суперечити один одному. Показано зв'язок із добре відомою дворівневою схемою методу аналізу ієрархій.

Наведено ілюстративний приклад, на якому показано як ситуацію рівноваги альтернатив, так і можливість відходу від рівноваги за рахунок зміни матриць попарних порівнянь.

Ключові слова: ранжування альтернатив, модель «стан–імовірність дії», рівновага альтернатив, попарні порівняння, метод аналізу ієрархій.

1. Вступ

У роботах [7; 11–14] розвивається формалізований підхід до моделювання процесів індивідуального та колективного недетермінованого прийняття рішень, який можна охарактеризувати як модель «стан–імовірність дії».

Нехай є n альтернатив, які утворюють множину $A = \{a_1, ..., a_n\}$, і агент має прийняти рішення про вибір однієї з цих альтернатив. Вводиться випадкова величина ξ, яка змістовно означає альтернативу, яку вибирає агент у ситуації прийняття рішень. Вводиться система станів $S = \{s_1, ..., s_m\}$, у яких може перебувати агент; існує значна свобода у заданні як самої системи станів, так і їх кількості m. Розглядається випадкове блукання між станами, в рамках якого моделюється колективне прийняття рішень на основі індивідуальних виборів окремих агентів. Вводиться також випадкова величина η — стан, у якому перебуває агент.

У базовому, найпростішому випадку кожний стан просто задає розподіл ймовірностей, з якими вибирається та чи та альтернатива. З системою станів S пов'язується матриця «стан–імовірність дії» $H = \{h_{ij}\}$, де $h_{ij} = P(\xi = a_j \mid \eta = s_i)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ — імовірність того, що агент, який перебуває в i-му стані, вибере j-ту альтернативу. Матриця H належить до класу, який отримав назву прямокутних стохастичних матриць [1; 11], тобто матриць, сума елементів кожного рядка яких дорівнює 1.

Розглядається також вектор $\overline{p} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_m)$, де $\overline{p}_i = P(\eta = s_i)$ — ймовірність перебування агента в i-му стані. Замість явного задання цих імовірностей їх можна отримати на основі аналізу деякого марковського ланцюга переходів між станами.

Ставиться задача отримання остаточних імовірностей прийняття рішень, які утворюють вектор $p = (p_1, ..., p_n)$, де $p_j = P(\xi = a_j)$ — імовірність прийняття j-го рішення. Як показано в [11],

$$P(\xi = a_j) = \sum_{i=1}^{m} P(\eta = s_i) \cdot P(\xi = a_j | \eta = s_i), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

або у векторно-матричному вигляді

$$p = \overline{p}H.$$

Можливі стани моделі «стан–імовірність дії» і, відповідно, елементи матриці H можуть обиратися досить довільно, і в описаному вище базовому варіанті вони не мають зрозумілої змістовної інтерпретації. Важливо розвивати загальні принципи, на основі яких можуть будуватися матриці «стан–імовірність дії». Крім того, в [7] запропоновано підхід до побудови більш структурованих багаторівневих моделей «стан–імовірність дії» на основі розгляду пов'язаних систем станів.

Приймаючи рішення, часто доводиться оперувати неформальними інтуїтивними уявленнями про те, що деяка альтернатива є кращою або гіршою за іншу. Ця обставина дає можливість говорити про можливість застосування попарних порівнянь і методу аналізу ієрархій (МАІ) [17; 2 та ін.], що базується на них. У цій статті запропоновано підхід до побудови багаторівневих моделей «стан–імовірність дії» на основі попарних порівнянь.

Слід зауважити, що найважливішим є випадок двох альтернатив ($n = 2$). У статті буде передусім розглянуто саме цей випадок, якщо не буде явно зазначено щось інше.

2. Попарні порівняння та матриці «стан–імовірність дії»

Матриця попарних порівнянь (МПП) — це $(n \times n)$-матриця $M = (m_{ij},\ i, j = \overline{1, n})$, яка описує відношення переваг між альтернативами. Нагадаємо, що через n ми позначаємо кількість альтернатив. Зазвичай приймається, що якщо i-та альтернатива краща за j-ту (позначається $a_i \succ a_j$), то $m_{ij} > 1$. Якщо альтернативи рівнозначні ($a_i \sim a_j$), то $m_{ij} = 1$. Якщо ж i-та альтернатива гірша за j-ту (позначається $a_i \prec a_j$), то $m_{ij} < 1$. МПП зазвичай будують експертним шляхом, і експерти часто формулюють свої уподобання в словесній формі.

Існують різні підходи до побудови МПП, і з цим пов'язана низка серйозних питань [17; 3 та ін.]. Класична шкала градацій, запропонована Т. Сааті (1 — варіанти рівнозначні, 2 і 3 — слабка перевага і т. д.), не завжди призводить до гарних результатів. Деякою мірою це можна пояснити органічною проблемою, пов'язаною з мультиплікативним характером порівнянь. Зокрема, якщо перевагу варіанта А над варіантом В оцінюють як 2, то мультиплікативність неявно означає, що варіант А має бути кращим за В у 2 рази, а це далеко не завжди відповідає уявленню про слабку перевагу. Набули поширення транзитивні шкали [3 та ін.], для яких наступна градація переваг більша за попередню в τ разів; τ — деяке задане число. З цим, хоч і не лише з цим, тісно пов'язане логарифмічне подання МПП, для якого в МПП фігурують не самі оцінки переваг, а їх логарифми за тією чи іншою основою.

Транзитивну шкалу з параметром τ називатимемо τ-транзитивною шкалою. Тоді міру переваги однієї альтернативи над іншою можна оцінювати як цілочисельну кількість градацій між ними. Наприклад, якщо перевагу 1-ї альтернативи над 2-ю оцінити як мінімальну (1 градація), а 2-ї над 3-ю як трохи сильнішу (2 градації), то матриця переваг у термінах градацій (в логарифмічному поданні) може мати вигляд [13]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Повна ж МПП при застосуванні τ-транзитивної шкали запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau^3 \\ \frac{1}{\tau} & 1 & \tau^2 \\ \frac{1}{\tau^3} & \frac{1}{\tau^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Більш загально, якщо c_{ij} — перевага i-го варіанта над j-м у термінах градацій, то відповідний елемент МПП при застосуванні τ-транзитивної шкали обчислюється як [13]

$$m_{ij} = \tau^{c_{ij}}.$$

Слід зазначити, що в логарифмічній шкалі рівнозначність альтернатив — це 0, а не 1.

Міркування про можливість застосування попарних порівнянь, зокрема на основі транзитивних шкал, до побудови матриць «стан–імовірність дії», пов'язані з природним уявленням про те, що можливі стани моделі «стан–імовірність дії» можуть відповідати кількостям градацій переваг однієї альтернативи над іншою.

3. Системи станів і матриця «стан–імовірність дії» на основі градацій переваг

У рамках запропонованого підходу розглядатимемо наступну систему станів із параметром q, який змістовно означає максимальну кількість градацій переваг (нагадаємо, що йдеться про випадок двох альтернатив, назвемо ці альтернативи *A1* та *A2*):

A1 краще за A2 на q градацій;
A1 краще за A2 на q-1 градацій;
…
A1 краще за A2 на 1 градацію;
A1 та A2 рівнозначні (чисельне значення в логарифмічній шкалі– 0).

Для відношення «гірше» чисельні значення кількостей градацій розставляють симетрично, але зі знаком мінус.

Вибір параметра q, очевидно, має істотне значення. Його збільшення має призводити до більш гнучких і тонко диференційованих систем станів. З іншого боку, в разі збільшення q різниця між сусідніми станами стає менш помітною, і експертам стає важче провести диференціацію і дати точну оцінку ступеня переваги.

На основі описаної системи станів легко отримати матрицю «стан–імовірність дії», якщо використовувати транзитивну шкалу з тим чи іншим параметром. Основна частина матриці формується на основі такого алгоритму:

– для всіх k від q до $-q$:
– отримуємо вектор $v = (v_1, v_2)$ з компонентами

$$v_1 = \tau^k, \ v_2 = \tau^{-k};$$

– вектор v нормалізується так, щоб сума його компонент дорівнювала 1;
– результуючий вектор стає черговим рядком матриці «стан–імовірність дії».

Крім того, як перший і останній рядки матриці «стан–імовірність дії» доцільно взяти рядки, які відповідають визначальній перевазі однієї альтернативи над іншою (відповідні рішення приймаються з імовірністю 0 або 1).

Побудована таким чином матриця «стан–імовірність дії» за $q = 3$, $\tau = 1.3$ має вигляд (наближено):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.8284 & 0.1716 \\ 0.7407 & 0.2593 \\ 0.6283 & 0.3717 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.3717 & 0.6283 \\ 0.2593 & 0.7407 \\ 0.1716 & 0.8284 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отримана матриця H належить до класу так званих центросиметричних матриць, опис яких можна знайти в [20; 9]. Аналіз центросиметричних матриць має суттєве значення для дослідження симетричних ситуацій рівноваги альтернатив [11], тобто ситуацій, коли жодна з альтернатив не має переваги над іншими.

Проілюструємо на цьому ж прикладі обчислення ймовірностей прийняття рішень за умови, що відомий вектор $\bar{p}$, який задає ймовірності перебування агента у вищеописаних станах. Нехай

$$\bar{p} = (0.5, \ 0.1, \ 0.15, \ 0.15, \ 0.2, \ 0.15, \ 0.15, \ 0.05, \ 0)$$

Тоді рішення приймаються з імовірностями (наближено):

$$p = \bar{p}H = (0.5414, 0.4586).$$

Це означає, що агент з імовірністю 0.5414 вибере першу альтернативу, а з імовірністю 0.4586 — другу.

4. Багатофакторне прийняття рішень і дворівневий метод аналізу ієрархій

Вибір між альтернативами, як правило, здійснюється на основі тих чи тих факторів — критеріїв та/або ознак. Зокрема, на цьому ґрунтується класична дворівнева схема прийняття рішень у рамках методу аналізу ієрархій. Оцінки альтернатив за цим підходом обчислюють за формулою

$$u(a_i) = \textstyle\sum_k \lambda_k \beta_{ik},$$

де β_{ik} — оцінка i-ї альтернативи, отримана на основі попарних порівнянь окремо за k-м критерієм;

λ_k — вага k-го критерію, отримана на основі МПП між критеріями.

Вектор оцінок альтернатив на основі МПП найчастіше беруть як перронів (нормалізований головний власний вектор) МПП. Часто використовують також підхід, за якого як оцінки використовують середні геометричні рядків МПП. Популярним є спосіб отримання оцінок на основі логарифмічного методу найменших квадратів [4], особливо якщо МПП є неповною.

У [7] запропоновано підхід до формування більш структурованих моделей «стан–імовірність дії» на основі введення взаємопов'язаних систем станів. У загальних рисах, кожна система станів пов'язується з окремим фактором, задають матриці, що описують вплив одного фактора на інший. Застосуємо цей підхід до побудови дворівневої моделі «стан–імовірність дії» на основі попарних порівнянь альтернатив із метою моделювання багатофакторного недетермінованого прийняття рішень; це наблизить підхід, що розвивається, до методу аналізу ієрархій. Деякі міркування щодо цього наведено в [14], нижче дамо певну їх формалізацію.

5. Дворівнева модель «стан–імовірність дії» на основі попарних порівнянь

В основі запропонованої моделі лежать такі міркування. Розглядається K критеріїв, за якими порівнюють альтернативи, а також система пов'язаних із ними правил на зразок «*якщо альтернатива A краща за альтернативу B за окремо взятим критерієм, то A краща за B в цілому*». Зрозуміло, що висновки, зроблені за одним правилом, можуть суперечити висновкам, зробленим за іншим; пропонується здійснювати комбінування висновків на основі тих чи тих вагових коефіцієнтів критеріїв. Опишемо ці міркування більш формалізовано.

Оскільки йдеться про порівняння двох альтернатив, то можна вводити стани, які відповідають мірам переваг однієї альтернативи над іншою в термінах градацій переваг подібно до того, як це зроблено в п. 3. Система станів $S^* = \{s_i^*, i = \overline{1, m^*}\}$ відповідає загальній мірі переваги на основі сукупності критеріїв, а системи станів $S^{(k)} = \{s_i^{(k)}, i = 1, m^{(k)}\}$, $k = \overline{1, K}$ — мірам переваг за окремим критеріями. Легко бачити, що між S^* та $S^{(k)}$, $k = \overline{1, K}$ існує ієрархічний зв'язок.

Введемо набір випадкових величин φ_k, $k = \overline{1, K}$, які пов'язані з окремими критеріями та змістовно означають, в якому з відповідних станів перебуває агент. Введемо також матриці $Y^{(k)}$, які пов'язують систему станів S^* з системами станів $S^{(k)}$:

$$Y_{ij}^{(k)} = P\left(\eta = s_j^* \middle| \varphi_k = s_i^{(k)}, k = \overline{1,K}, i = \overline{1,m^{(k)}}, j = \overline{1,m^*}\right).$$

Тоді вектор ймовірностей прийняття рішень можна обчислити за формулою

$$p = \overline{p^*}H, \quad (1)$$

$$\overline{p^*} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k p^{(k)}, \quad (2)$$

$$p^{(k)} = \overline{p^{(k)}} Y^{(k)}, \quad (3)$$

$p^{(k)}$ – задані ймовірності перебування агента в станах відповідної системи $S^{(k)}$,

λ_k – ваговий коефіцієнт, який задає міру важливості k-го критерію. Ці коефіцієнти можна отримати на основі заданої матриці попарних порівнянь між критеріями, як це робиться в класичному МАІ.

У принципі, можна взяти однакову кількість градацій переваг (тобто станів) для всіх систем станів, а всі матриці $Y_{ij}^{(k)}$ — одиничними (що означає детермінований зв'язок між системами станів на різних рівнях). Але гнучкість моделі можна підвищити, якщо дозволити різні кількості градацій переваг, а також недетермінований зв'язок між системами станів. Саме так ми зробимо в наступному прикладі.

6. Ілюстративний приклад

Промоделюємо процес президентських виборів у деякій гіпотетичній країні. Нехай за перемогу змагаються кандидати від двох партій — Партії Утопічних Ідеалів (ПУІ) та Партії Гіркої Правди (ПГП).

Нехай порівняння здійснюються за трьома критеріями:

– *К1 — харизматичність кандидатів;*
– *К2 — привабливість політичної програми;*
– *К3 — реалістичність політичної програми.*

Імовірно, в реальності критерії можуть бути дещо іншими, але наш приклад має ілюстративний характер.

Систему станів, безпосередньо пов'язану з прийняттям рішення, тобто з волевиявленням виборця, та відповідну матрицю «стан–імовірність дії» візьмемо такі самі, як і в п. 3.

Із кожним критерієм пов'яжемо систему станів із параметром $q = 2$. Змістовно відповідні градації можна проінтерпретувати так:

0 — рівнозначність за даним критерієм;
1 — незначна перевага;
2 — помітна перевага.

Матриці $Y^{(k)}$, які матимуть розмір $(m^{(k)} \times m^*)$, $m^{(k)} = m^{(K1)} = m^{(K2)} = m^{(K3)} = 2q + 1$, тобто в цьому випадку (5×9), також візьмемо однаковими, наприклад:

$$Y = Y^{(K1)} = Y^{(K2)} = Y^{(K3)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & 0.07 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.07 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що вибрано також центросиметричну матрицю.

Тоді результат волевиявлення по суті визначається заданням векторів імовірностей перебування агента у станах систем, пов'язаних з окремими критеріями, а також ваговими коефіцієнтами критеріїв.

Нехай вектори ймовірностей перебування у відповідних станах дорівнюють

$$\overline{p^{(K1)}} = (0., \quad 0.3, \quad 0.4, \quad 0.3, \quad 0.)$$

$$\overline{p^{(K2)}} = (0.7, \quad 0.2, \quad 0.1, \quad 0., \quad 0.)$$

$$\overline{p^{(K3)}} = (0., \quad 0., \quad 0.1, \quad 0.2, \quad 0.7)$$

Змістовно це означає, що за критерієм привабливості програми агент більш схильний віддати перевагу кандидатові від ПУІ, за критерієм реалістичності — кандидатові від ПГП, а за харизматичністю обидва кандидати рівноцінні.

Тоді вектори ймовірностей перебування агента в станах системи S^*, обчислені на основі формули (3) за кожним критерієм окремо, дорівнюють

$$p^{(K1)} = (0.004,\ 0.038,\ 0.088,\ 0.23,\ 0.28,\ 0.23,\ 0.088,\ 0{,}038,\ 0.004)$$

$$p^{(K2)} = (0.631,\ 0.092,\ 0.047,\ 0.1,\ 0.08,\ 0.04,\ 0.007,\ 0{,}002,\ 0.001)$$

$$p^{(K3)} = (0.001,\ 0.002,\ 0.007,\ 0.04,\ 0.08,\ 0.1,\ 0.047,\ 0{,}092,\ 0.631)$$

Для отримання комбінованого вектора ймовірностей за формулою (2) потрібно знати вагові коефіцієнти λ_k, які відображають міри важливості критеріїв. Ці коефіцієнти можуть бути задані безпосередньо, але для МАІ більш характерним є їх отримання на основі матриці попарних порівнянь. Для задання МПП будемо використовувати транзитивні шкали, а самі МПП задаватимемо в термінах кількостей градацій, як це було описано в п. 2. Для визначеності візьмемо параметр $\tau^{(K)} = 1.5$. Розмір такої МПП буде 3×3 (за кількістю критеріїв).

Спочатку розглянемо ситуацію, коли всі три критерії рівнозначні. Тоді МПП у логарифмічній формі складатиметься з одних нулів, а відповідна традиційна МПП — з одних одиниць. Зрозуміло, що перронів вектор такої матриці і, відповідно, вектор вагових коефіцієнтів дорівнює

$$\left(\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}\right)$$

(тобто всі критерії мають однакові вагові коефіцієнти).

Комбінований вектор, обчислений за формулою (2), у цьому випадку дорівнює,

$$\bar{p}^* = (0.212, \;\; 0.044, \;\; 0.0473, \;\; 0.1233, \;\; 0.1467, \;\; 0.1233, \;\; 0.0473, \;\; 0.044, \;\; 0.212),$$

а вектор ймовірностей прийняття рішень, обчислений за формулою (1) —

$$p = \bar{p}^* H = (0.5, \;\; 0.5)$$

Це й означає рівновагу альтернатив: жодна альтернатива не має переваги над іншою; ймовірності того, що виборець проголосує за будь-яку з двох партій, однакові.

Змінимо МПП для критеріїв: нехай тепер критерій привабливості має перевагу над критерієм реалістичності на одну градацію. Тепер МПП у логарифмічній формі матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а традиційна МПП —

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 0.667 & 1 \end{pmatrix}.$$

У результаті обчислень, аналогічних вищенаведеним, отримуємо ймовірності прийняття рішень (наближено):

$$p \approx (0.5325, \;\; 0.4675).$$

Рівновагу альтернатив порушено. ПУІ має перевагу за індивідуального вибору і, як проілюстровано в [11], практично завжди перемагатиме за колективного вибору більшістю голосів, якщо кількість виборців є достатньо великою.

7. Висновки та обговорення

У статті здійснено розвиток підходу до моделювання процесів недетермінованого прийняття рішень на основі багаторівневої моделі «стан–імовірність дії». Ідеться перш за все про вибір між двома альтернативами, які можна порівнювати за довільною кількістю критеріїв. Описано, яким чином можна будувати матриці «стан–імовірність дії» на основі попарних порівнянь між самими альтернативами та між критеріями. При цьому використовуються транзитивні шкали, і можна задавати дискретні значення градацій переваг. У цьому контексті показано зв'язок підходу, що розвивається, з класичним дворівневим багатофакторним методом аналізу ієрархій. Наведено ілюстративний приклад.

Видається доцільним розвивати методики, спрямовані на зменшення ступеня довільності при формуванні матриць «стан–імовірність дії». З цією метою варто звернути увагу на підходи, пов'язані з застосуванням нечітких величин та описом на цій основі ступенів переваг, а також з урахуванням ступенів рішучості агентів при заданні ймовірностей прийняття рішень.

Звертає на себе увагу ще й така обставина. У нашому прикладі ми довільно змінювали міру переваги одного критерію над іншим незалежно від інших елементів матриці. Часто це призводить до зниження узгодженості МПП, і для подолання цього ефекту слід робити належні корективи, зокрема застосовувати процедури, спрямовані на отримання більш узгоджених матриць попарних порівнянь [8; 10; 16 та ін.]. При використанні цих процедур виникає низка проблем, і механічне їх застосування може призвести до небажаних результатів; це було проілюстровано, зокрема, в [15]. Зокрема, слід розрізняти «доброякісні» помилки та «злоякісні» маніпуляції з боку недостатньо доброчесних експертів і залежно від цього приймати різні рішення.

Список літератури

1. Beneduci R. Stochastic matrices and a property of the infinite sequences of linear functionals / R. Beneduci // Linear Algebra and its Applications. — 2010. — Vol. 433. — Pp. 1224–1239.
2. Brunelli M. Introduction to the Analytic Hierarchy Process / M. Brunelli. — Springer, Cham, 2015.
3. Choo E. A Common Framework for Deriving Preference Values from Pairwise Comparison Matrices / E. Choo, W. Wedley // Comput. Oper. Res. — 2004. — Vol. 31 (6). — Pp. 893–908.
4. Crawford G. A note on the analysis of subjective judgment matrices / G. Crawford, C. Williams // Journal of Mathematical Psychology. — 1985. — Vol. 29 (4). — Pp. 387–405. https://doi.org/10.1016/0022-2496(85)90002-1.
5. Ho W. Integrated analytic hierarchy process and its applications. A literature review / W. Ho // European Journal of Operational Research. — 2008. — Vol. 186 (1). — Pp. 211–228.
6. Ishizaka A. Review of the main developments in the analytic hierarchy process / A. Ishizaka, A. Labib // Expert Syst. Appl. — 2011. — Vol. 38. — Pp. 14336–14345.
7. Ivokhin E. V. Restructuring of the Model "State–Probability of Choice" Based on Products of Stochastic Rectangular Matrices / E. V. Ivokhin, O. V. Oletsky // Cybern Syst Anal. — 2022. — Vol. 58 (2). — Pp. 242–250. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00456-z.
8. Koczkodaj W. The limit of inconsistency reduction in pairwise comparisons / W. Koczkodaj, J. Szybowski // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2016. — Vol. 26. — Pp. 721–729.
9. Melman A. Symmetric centrosymmetric matrix-vector multiplication / A. Melman // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 320. — Pp. 193–198.
10. Mikhailov L. Improving the Ordinal Consistency of Pairwise Comparison Matrices / L. Mikhailov, S. Siraj // Proceedings of the XI International Symposium for the Analytic Hierarchy Process ISAHP-2011.
11. Oletsky O. Formalizing the Procedure for the Formation of a Dynamic Equilibrium of Alternatives in a Multi-Agent Environment in Decision-Making by Majority of Votes / O. Oletsky, E. Ivohin // Cybern Syst Anal. — 2021. — Vol. 57. — Pp. 47–56. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00328-y.
12. Oletsky O. A Model of Information Influences on the Base of Rectangular Stochastic Matrices in Chains of Reasoning with Possible Contradictions / O. Oletsky // CEUR Workshop Proceedings. — 2021. — Vol. 3179. — Pp. 354–361.
13. Oletsky O. On Constructing Adjustable Procedures for Enhancing Consistency of Pairwise Comparisons on the Base of Linear Equations / O. Oletsky // CEUR Workshop Proceedings. — 2021. — Vol. 3106. — Pp. 177–185.
14. Oletsky O. On Applying the Structured Model "State-Probability of Action" to Multi-Criteria Decision Making and Contradictory Reasoning / O. Oletsky, I. Peleshchak // CEUR Workshop Proceedings. — 2022. — Vol. 3312. — Pp. 189–199.
15. Oletsky O. Some Ways of Counteracting Possible Manipulations Within the AHP on The Base of Weighted Linear Equations / O. Oletsky, D. Dosyn // CEUR Workshop Proceedings. — 2022. — Vol. 3347. — Pp. 185–194.
16. Potomkin M. M. Improvement of Analytic Hierarchy Process based on the Refinement of the Procedures for the Formation of Pairwise Comparison Matrices / M. M. Potomkin, M. V. Nikolaienko, D. I. Grazion // Cybern Syst Anal. — 2020. — Vol. 56. — Pp. 603–610. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00277-y.
17. Saaty T. L. The Analytic Hierarchy Process / T. L. Saaty. — McGraw-Hill, New York, 1980.
18. Tsyganok V. V. Usage of Scales with Different Number of Grades for Pair Comparisons in Decision Support Systems / V. V. Tsyganok, S. V. Kadenko, O. V. Andriichuk // International Journal of the Analytic Hierarchy Process. — 2016. — Vol. 8 (1). — Pp. 112–130.
19. Vaidya O. S. Analytic hierarchy process: An overview of applications / O. S. Vaidya, S. Kumar // European Journal of Operational Research. — 2006. — Vol. 169 (1). — Pp. 1—29.
20. Weaver J. R. Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigenvalues and eigenvectors / J. R. Weaver // Amer. Math. Monthly. — 1985. — Vol. 92. — Pp. 711–717.
21. Yu O. Assessing and Improving Consistency of a Pairwise Comparison Matrix in the Analytic Hierarchy Process / O. Yu // Portland International Conference on Management of Engineering and Technology. — 2017. — Pp. 1–6.

References

Beneduci, R. (2010). Stochastic matrices and a property of the infinite sequences of linear functionals. *Linear Algebra and its Applications*, *433*, 1224–1239.

Brunelli, M. (2015). *Introduction to the Analytic Hierarchy Process,* Springer, Cham.

Choo, E., & Wedley, W. (2004). A Common Framework for Deriving Preference Values from Pairwise Comparison Matrices. *Comput. Oper. Res., 31* (6), 893–908.

Crawford, G., & Williams, C. (1985). A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, *29* (4), 387–405. https://doi.org/10.1016/0022-2496(85)90002-1.

Ho, W. (2008). Integrated analytic hierarchy process and its applications. A literature review. *European Journal of Operational Research*, *186* (1), 211–228.

Ishizaka, A., & Labib, A. (2011). Review of the main developments in the analytic hierarchy process. *Expert Syst. Appl*., *38*, 14336–14345.

Ivokhin, E., & Oletsky, O. (2022). Restructuring of the Model "State–Probability of Choice" Based on Products of Stochastic Rectangular Matrices. *Cybern Syst Anal.*, *58* (2), 242–250. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00456-z.

Koczkodaj, W., & Szybowski, J. (2016). The limit of inconsistency reduction in pairwise comparisons. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, *26*, 721–729.

Melman, A. (2000). Symmetric centrosymmetric matrix-vector multiplication. *Linear Algebra Appl.*, *320*, 193–198.

Mikhailov, L., & Siraj, S. (2011). Improving the Ordinal Consistency of Pairwise Comparison Matrices. *Proceedings of the XI International Symposium for the Analytic Hierarchy Process ISAHP-2011*.

Oletsky, O., & Ivohin, E. (2021). Formalizing the Procedure for the Formation of a Dynamic Equilibrium of Alternatives in a Multi-Agent Environment in Decision-Making by Majority of Votes. *Cybern Syst Anal*, *57*, 47–56. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00328-y.

Oletsky, O. (2021a). A Model of Information Influences on the Base of Rectangular Stochastic Matrices in Chains of Reasoning with Possible Contradictions. *CEUR Workshop Proceedings*, *3179*, 354–361.

Oletsky, O. (2021b). On Constructing Adjustable Procedures for Enhancing Consistency of Pairwise Comparisons on the Base of Linear Equations. *CEUR Workshop Proceedings*, *3106*, 177–185.

Oletsky, O., & Peleshchak, I. (2022). On Applying the Structured Model "State-Probability of Action" to Multi-Criteria Decision Making and Contradictory Reasoning. *CEUR Workshop Proceedings*, *3312*, 189–199.

Oletsky, O., & Dosyn, D. (2022). Some Ways of Counteracting Possible Manipulations Within the AHP on The Base of Weighted Linear Equations. *CEUR Workshop Proceedings*, *3347*, 185–194.

Potomkin, M., Nikolaienko, M., & Grazion, D. (2020). Improvement of Analytic Hierarchy Process based on the Refinement of the Procedures for the Formation of Pairwise Comparison Matrices. *Cybern Syst Anal*, *56*, 603–610. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00277-y.

Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.

Tsyganok, V., Kadenko, S., & Andriichuk, O. (2016). Usage of Scales with Different Number of Grades for Pair Comparisons in Decision Support Systems. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process*, *8* (1), 112–130.

Vaidya, O., & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, *169* (1), 1–29.

Weaver, J. (1985). Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigenvalues and eigenvectors. *Amer. Math. Monthly*, *92*, 711–717.

Yu, O. (2017). Assessing and Improving Consistency of a Pairwise Comparison Matrix in the Analytic Hierarchy Process. *Portland International Conference on Management of Engineering and Technology*, 1–6.

O. Oletsky, I. Franchuk, V. Humynskyi

ON AN APPROACH TO FORMING TWO-LEVEL MODEL "STATE-PROBABILITY OF ACTION" ON THE BASE OF PAIRWISE COMPARISONS ON THE AND ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

An approach to modeling non-deterministic and probabilistic decision making on the base of the model "state-probability of choice" is being developed in the paper. A way to forming a specific type of such a model on the base of pairwise comparisons and the Analytic Hierarchy Process is suggested.

The regarded case is that an agent is to choose one of two available alternatives, but this choice depends on different criteria. Some systems of states connected to the hierarchy are suggested. The first-level system is the basis one, states of which correspond to probabilities of choosing the two options. Each second-level system corresponds to a separate criterion which may affect the final choice.

For forming systems of states, applying pairwise comparisons is suggested. Each state corresponds to a certain grade of preference between alternatives – either in general or by separate criterion; transitive scales for quantifying preference values are used. Within the framework of the model "state-probability of action" that actually corresponds to the following rule of making decisions: "if an alternative has the preference over some other alternative with respect to a separate criteria then it has an overall preference over that alternative".

Decisions made by separate criteria probably shall contradict to each other. The suggested way to getting a combined decision is based on pairwise comparisons among the criteria like the approach common to the two-level Analytic Hierarchy Process. Weighting coefficients reflecting degrees of importance for each criterion are being found as the Perronian, i.e. the normalized eigenvectors of the pairwise comparison matrix though there are some other approaches.

An illustrative example involving two alternatives and three criteria is provided. This example illustrates both a situation of equilibrium between alternatives and breaking it by means of changing the matrix of pairwise comparisons among criteria.

Some ways of developing the suggested approach as well as some arising problems are discussed. This includes but is not limited to possible using of fuzzy estimations, non-linear transformations of grading scales, different way of treating different types of inconsistencies in PCMs etc.

Keywords: ranking of alternatives, model "state-probability of action", equilibrium of alternatives, pairwise comparisons, Analytic Hierarchy Process.

Матеріал надійшов 19.08.2023