

Чорней Р. К.

ЛОКАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В МЕРЕЖАХ ГОРДОНА — НЬЮЕЛЛА

Запропоновано модифікацію мережі Гордона — Ньюелла з локальною та синхронною взаємодією, яка обслуговує клієнтів у замкнутому режимі. Система околів задається за допомогою деякого скінченного графа вузлів системи. Запропоновано процедуру знаходження оптимальних нерандомізованих стратегій керування для систем із критерієм усереднених в одиницю часу витрат.

Ключові слова: мережа Гордона — Ньюелла, локальна та синхронна взаємодія, керовані випадкові процеси, процеси прийняття рішень.

1. Вступ

У цій роботі конструюються моделі просторово розподілених систем із неперервним часом, які керуються особами, що приймають рішення, які діють на локальному рівні та мають лише інформацію про стан системи навколо свого положення. При цьому особливу увагу приділяємо марковським системам.

Це узгоджується з основними напрямками досліджень у літературі: оптимальне (послідовне) керування стохастичними системами в більшості випадків описано моделями процесу Маркова. Однак існує багато літератури з керування процесами, які не використовують властивість пам'яті марковських систем. Введення непоказникових, відповідно геометричних, термінів перебування процесів призводить до розгляду напівмарковських процесів і марковських процесів відновлення.

Найдавнішими роботами зі стохастичної динамічної оптимізації для напівмарковських процесів (які іноді називають процесами відновлення з винагородою) є роботи [7; 9; 10]. Більш сучасні роботи з напівмарковських процесів прийняття рішень можна знайти, наприклад, в [1; 12; 14–16] і літературних джерелах, на які в них посилаються. Загальну конструкцію напіввідновлювальних керованих процесів і напівмарковських керованих процесів із застосуванням до систем черг можна знайти в роботі Китаєва і Рикова [13].

Метою цієї роботи є визначення доповненої мережі Гордона — Ньюелла, для якої виконуються умови синхронної та локальної взаємодії вузлів, і знаходження оптимальних режимів її функціонування.

2. Локальність і синхронність доповненої мережі Гордона — Ньюелла

Розглядаємо стохастичні процеси з неперервним часом із загальним компактним простором значень, який структурований деяким основним графом, як це було визначено в роботі [3]. Кожна вершина графа перебуває у деякому локальному стані системи, такому, що глобальний простір станів процесу є добутком (індексним графом) локальних просторів станів. Таким чином, граф визначає околіву структуру станів описаних систем. Ці околи визначають локальні взаємодії координат просторового процесу. Тоді для фіксованого моменту часу випадковий стан системи, відповідно до описання випадкового процесу, є випадковим полем відносно графа околів.

Припускаємо, що процес має напівмарковську властивість часу і що ядра переходу процесу мають просторову марковську властивість відносно основного графа. Додатково створюємо структуру керування для оптимізації розвитку системи в часі. Оптимальність тут розуміється відносно критерію асимптотично усередненої в часі винагороди.

Розглядатимемо тільки ступінчасті керування, як це визначено в розділі 5 роботи [2]. Необхідні означення стохастичних процесів, які розвиваються в просторі і часі, подані в роботі [3]. Припускаємо, що час буде неперервним, однак прийняття рішень дозволяється лише в моменти стрибків про-

цесу (детальніше див. [1; 17]). Випадкові політики представляються, як звичайно, умовною незалежною структурою. Припускаємо також, що таку структуру може бути знайдено в ядрах переходу стрибкоподібних ланцюгів (синхронізовані ядра). В роботах [2; 3] введено абстрактні умови існування стаціонарних детермінованих стратегій у класі локальних стратегій, і потім показується, що за деяких припущень слабкої гладкості ці умови виконуються.

Для систем із локально взаємодіючими координатами формальне означення структури взаємодії та простору станів визначається за допомогою ненаправленого скінченного графа околів. Припустимо, що локальний простір станів X_i — компактний метричний простір зі зліченною базою, наділений борелівською σ -алгеброю $\mathcal{X}_i$. Тоді $X := \prod_{i \in V} X_i$ — глобальний простір станів системи, наділений добутковою σ -алгеброю $\mathcal{X}_V = \sigma\{\prod_{i \in V} \mathcal{X}_i\} =: \mathcal{X}$.

Еволюція в часі системи описується стохастичним процесом $\eta = (\eta^t)$ з простором станів $(X, \mathcal{X}) = (\prod_{i \in V} X_i, \sigma\{\prod_{i \in V} \mathcal{X}_i\})$ з випадковими полями як одновимірними маргіналами в часі.

Припускаємо, що час неперервний, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Індекс k при η_k^t позначатиме належність вершині k , η_k^t таким чином позначає маргінальний розподіл у момент часу t вершини k деякого векторнозначного процесу $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$. Такі процеси, що змінюються в просторі та часі, причому просторова змінна структурується деяким графом, були досліджені в роботах [2; 3] за допомогою використання методів ланцюгів Маркова.

У роботі [3] усувається припущення, що в часі процеси змінюються без запам'ятовування (експоненціально чи геометрично розподіленого); тобто досліджуються напівмарковські процеси та марковські процеси відновлення. Наведемо їхні означення.

Означення 1 [марковський процес відновлення і напівмарковський процес]. Розглянемо стохастичний стрибкоподібний процес $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$ з простором станів X і неперервною праворуч траєкторією, яка має лівосторонні границі (cadlag шляхи), визначений послідовністю $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$. $\mathbb{R}_+$ -значні випадкові величини τ^n є тривалостями часу між стрибками, а послідовність $\{\xi^n, n = 0, 1, \dots\}$ — послідовність станів процесу, отриманих одразу після моментів стрибків. Далі більш точно (детально).

Нехай $\sigma = \{\sigma^n : n = 0, 1, \dots\}$ — зростаюча послідовність моментів стрибків, визначена співвідношеннями $\sigma^0 = 0$ і $\sigma^n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau^i$, $n > 0$. Тоді, якщо час $t \in [\sigma^n, \sigma^{n+1})$, то $\eta^t = \xi^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Якщо (для будь-якого n) $P(\xi^k, k=0,1,\dots,n-1, \sigma^0, \tau^k, k=0,1,\dots,n-2)$ — майже всюди визначених умовних розподілів послідовності $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$ виконується

$$\begin{aligned} P\{\xi^{n+1} \in C, \tau^n \leq s \mid \xi^k = x^k, k = 0, 1, \dots, n, \dots, \sigma^0 = 0, \tau^k = s^k, k = 0, 1, \dots, n-1\} \\ = P\{\xi^{n+1} \in C, \tau^n \leq s \mid \xi^n = x^n\}, \quad n > 0, \end{aligned}$$

$P(\xi^k, k=0,1,\dots,n-1, \sigma^0, \tau^k, k=0,1,\dots,n-2)$ — майже всюди, і вони незалежні від n , то (ξ, τ) називається однорідним марковським процесом відновлення.

Процес $\eta = (\eta^t : 0 \leq t < \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i)$ називають однорідним напівмарковським процесом. Перехідну функцію

$$\tilde{Q}(C, s \mid x) = P\{\xi^{n+1} \in C, \tau^n \leq s \mid \xi^n = x\}$$

називають напівмарковським ядром обидвох: марковського процесу відновлення і напівмарковського процесу.

Припускаємо, що задано наступне ядро переходу, яке визначає умовний час перебування процесу з урахуванням теперішнього та наступного станів системи:

$$T(\cdot \mid x, y) = P\{\tau^n \leq \cdot \mid \xi^n = x, \xi^{n+1} = y\}, \quad x, y \in X,$$

де з правого боку умовний розподіл часу τ^n перебування процесу в стані x , якщо наступним станом буде y , де термін τ^n визначається $P^{\xi^n, \xi^{n+1}}$ — майже напевно.

Для систем із локально взаємодіючими координатами в роботах [2; 3] було введено формальне означення структури взаємодії і простору станів, тобто спеціальну структуру на графі взаємодії.

Припускаємо, що локальні простори станів X_i — компактні метричні простори зі зліченною базою, наділені борелівською σ -алгеброю $\mathcal{X}_i$.

Еволюція в часі такої системи з глобальним простором станів

$$(X, \mathcal{X}) = \left(\prod_{i \in V} X_i, \sigma \left\{ \prod_{i \in V} \mathcal{X}_i \right\} \right)$$

описується стохастичним процесом $\eta = (\eta^t : t \in [0, +\infty))$ з випадковими полями як одномірними маргіналями в часі. Таким чином, $\eta^t = (\eta_k^t : k \in V)$, де індекс k в η_k^t позначає належність вершині k , і отже, η_k^t позначає маргінальний стан в момент часу t в вершині k векторозначного процесу $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$.

Спочатку розглянемо марковські стрибкоподібні процеси, а згодом спеціальні напівмарковські процеси з неперервним часом, описані в розділі 5 роботи [2]. Важливою особливістю марковських процесів є те, що час затримки у відповідних станах процесів залишається без пам'яті, тобто експоненційно розподіляється з параметрами, що залежать від фактичного стану. Маємо

$$\begin{aligned} T(s | x, y) &= P\{\tau^n \leq s \mid \xi^n = x, \xi^{n+1} = y\} \\ &= P\{\tau^n \leq s \mid \xi^n = x\} \\ &= 1 - e^{-\lambda(x)s}, \quad x, y \in X, s \geq 0. \end{aligned}$$

Означення 2 [марковський стрибкоподібний процес]. Однорідний марковський стрибкоподібний процес із неперервним часом є напівмарковським процесом $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$ з простором станів $(X, \mathcal{X})$ і неперервними праворуч шляхами, що мають лівосторонні границі (cadlag шляхи), який визначається послідовністю $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$. Припускаємо, що процес $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$ має стаціонарні перехідні ймовірності p :

$$p(t; x, C) := P\{\eta^{t+s} \in C \mid \eta^s = x\} \quad \forall s \in \mathbb{R}_+ = [0; \infty), x \in X, C \in \mathcal{X}.$$

Зазначимо, що права частина не залежить від s . X -значна послідовність $\{\xi^n, n = 0, 1, \dots\}$ — послідовність станів процесу, що виникає одразу після моментів стрибків. $\mathbb{R}_+$ — значна випадкова величина $\{\tau^n, n = 1, 2, \dots\}$ — міжстрибкові інтервали часу. Якщо $\{\xi^n = x_n, n = 0, 1, \dots\}$ задано, то $\{\tau^n, n = 1, 2, \dots\}$ — послідовність незалежних експоненційно розподілених випадкових величин із параметрами $\lambda(x_n)$. Якщо бути точнішим щодо конструкції, то:

- послідовність моментів стрибків $\eta - \sigma = \{\sigma^n : n = 0, 1, \dots\}$, що задається як $\sigma^0 = 0$ і $\sigma^n = \sum_{i=1}^n \tau^i$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді для $t \in [\sigma^n, \sigma^{n+1})$ маємо $\eta^t = \xi^n$, $n \in \mathbb{N}$;
- однокрокові перехідні ймовірності вкладеного ланцюга стрибків — марковське ядро $(Q(C | x) : C \in \mathcal{X}, x \in X)$ послідовності $\{\xi^n = \eta^{\sigma^n}, n = 0, 1, \dots\}$;
- функція інтенсивності $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ — обмежена вимірна функція від x з $\lambda(x) < \Lambda < \infty$ для всіх $x \in X$.

Перехідні ймовірності p однорідного марковського стрибкоподібного процесу $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$ задовольняють для $x \notin C$ рівняння

$$p(t; x, C) = \lambda(x) \int_0^t e^{-\lambda(x)s} ds \int_X Q(dy | x) p(t-s; y, C) \quad (1)$$

і для $x \in C$

$$p(t; x, C) = e^{-\lambda(x)t} + \lambda(x) \int_0^t e^{-\lambda(x)s} ds \int_X Q(dy | x) p(t-s; y, C). \quad (2)$$

Звідси слідує, що

$$\frac{\partial p(t; x, C)}{\partial t} = \lambda(x) \left[-p(t; x, C) + \int_X Q(dy | x) p(t; y, C) \right].$$

Однорідний марковський стрибкоподібний процес із неперервним часом $\eta = (\eta^t : t \in \mathbb{R}_+)$ можна визначити як марковський процес, для якого слабкий інфінітезимальний оператор

$$[\mathfrak{A}f(\cdot)](x) = \lambda(x) \left[-f(x) + \int_X Q(dy | x) f(y) \right]$$

визначений на його області визначення, тобто на підмножині множини $M(X)$ вимірних обмежених функцій на X .

У некерованому випадку основний інтерес зосередимо на стрибкоподібних процесах взаємодії, для яких марковська умова визначається так само, як у випадку загальних напівмарковських процесів через вбудовані ланцюги стрибків. Наступне означення просто нагадує означення для марковської системи.

Означення 3 [синронні і локальні перехідні ядра]. Марковський стрибкоподібний процес із неперервним часом $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$ з пов'язаним процесом $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$ і простором станів $(X, \mathcal{X}) = (\prod_{i \in V} X_i, \sigma\{\prod_{i \in V} \mathcal{X}_i\})$ є локальним, якщо виконується

$$P\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi^n = x^n, \dots, \xi^0 = x^0\} = P\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi_{N(k)}^n = x_{N(k)}^n\}, \quad (3)$$

і синхронним, якщо виконується

$$P\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi^n = x^n\} = \prod_{k \in K} P\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi^n = x^n\}, \forall K \subset V, x^n \in X. \quad (4)$$

Тоді η називають марковським стрибкоподібним процесом із неперервним часом і локально взаємодіючими синхронними компонентами на (Γ, X) , або, коротко, марковським стрибкоподібним випадковим полем.

Далі опишемо приклад із теорії масового обслуговування, де застосовують локальне керування. Детальніше про мережеву теорію див. [4; 11]. У роботі [3] показано, що мережеві процеси з чергами, хоча і демонструють жорстку локальну поведінку щодо природної базової структури графів, не будуть повністю відповідати вказаній властивості (3) і наступній (4). Як і в [3], припустимо, що описані марковські процеси мають неперервні праворуч шляхи з лівосторонніми границями (cadlag шляхи) і що динаміка процесів повністю задана відповідними Q -матрицями $Q = (q(m, n) : m, n \in \mathbb{N})$. Наведемо опис ізольованої станції технічного обслуговування, яка згодом визначатиме локальну структуру вузлів мережі.

Означення 4 [залежний від стану сервер із чергою]. Розглянемо сервер типу $M/M/1/\infty$, куди клієнти (що не розрізняються) потрапляють по одному. Клієнти, які потрапляють на незайнятий сервер, негайно обслуговуються, тоді як клієнти, які прибувають на зайнятий сервер, заходять у зал очікування нескінченної ємності. Якщо не вказано інше, черга організована відповідно до режиму «першим прийшов, першим обслужили» (FCFS): якщо час обслуговування закінчується, клієнт негайно залишає систему, а клієнт на чолі черги, якщо такий є, йде на обслуговування, інші клієнти в черзі пересуваються на одну позицію вперед. Завжди вважатимемо, що ці зсуви тривають нульовий час.

Якщо в системі є n клієнтів, тоді час до наступного надходження клієнта проходить з інтенсивністю $\lambda(n)$, і (якщо $n > 0$) клієнт, що обслуговується, обслуговується з інтенсивністю $\mu(n)$. Враховуючи кількість клієнтів у системі, яку далі називатимемо довжиною черги, фактичний залишковий час обслуговування і залишковий час очікування надходження клієнта не залежать від минулого та не залежать один від одного.

Позначимо $\eta = (\eta^t : t \geq 0)$ процес випадкової довжини черги системи.

Зауваження 1. З означення випливає, що для опису залежної від стану еволюції черги одного сервера процесом Маркова достатньо записати довжину черги, тобто η , визначена у відповідному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з простором станів $\mathbb{N}$, — це строго марковський процес.

Робимо висновок: час перебування в стані n експоненціально розподілений з параметром $\lambda(n) + \mu(n)$, і подальше рішення про стрибок не залежить від часу перебування, а з імовірністю $\frac{\lambda(n)}{\lambda(n) + \mu(n)}$ наступний стрибок, спричинений переходом до стану $n + 1$ через надходження ще одного клієнта, з імовірністю $\frac{\mu(n)}{\lambda(n) + \mu(n)}$ наступний стрибок, викликаний закінченням терміну обслуговування (подія відправлення клієнта) і переходом до стану $n - 1$.

Виявляється, клас моделей, описаний в означенні 1, збігається з класом (залежних від стану) процесів народження — загибелі.

Теорема 1 [4]. Процес η , залежної від стану сервера довжини черги, є процесом народження — загибелі. Процес η ергодичний тоді й тільки тоді, коли

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)} < \infty.$$

Якщо η ергодичний, то його граничний розподіл $\pi = (\pi(n): n \in \mathbb{N})$ з

$$\pi(n) = G^{-1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $G < \infty$ — нормуюча константа.

Для подальшого обговорення структури класичних мереж масового обслуговування з урахуванням вимог до локальної та синхронізованої поведінки взаємодії марковських випадкових процесів і випадкових полів Маркова наведемо означення з [6].

Означення 5 [мережа Гордона — Ньюелла]. Мережа Гордона — Ньюелла є мережею зі станціями обслуговування (вузлами), пронумерованими множиною $\{1, 2, \dots, J\} := V$. Вузол j — система, залежна від стану сервера, з нескінченним залом очікування і режимом FCFS (див. означення 1 щодо деталей механізму обслуговування). Є $I > 0$ клієнтів, що обслуговуються циклічно згідно з незвідною матрицею Маркова $R = (r(i, j): i, j = 1, \dots, J)$.

Клієнт на виході з вузла i вибирає з імовірністю $r(i, j) \geq 0$ відвідування наступного вузла j і негайно туди потрапляє на обслуговування, якщо вузол j вільний; інакше, стає у хвіст черги вузла j .

Якщо вузол відправлення i задано, то рішення про маршрутизацію клієнта приймається незалежно від історії мережі. Клієнти, що прибувають у вузол j , вимагають певного обсягу роботи (часу обслуговування), що експоненціально розподілений із математичним сподіванням 1. Всі тривалості обслуговування — сімейство незалежних випадкових величин.

Нехай η_j^t позначає кількість клієнтів, що перебувають у вузлі j в момент часу $t \geq 0$ в очікуванні чи на обслуговуванні (локальна довжина черги у вузлі j). Тоді $\eta^t := (\eta_j^t: j = 1, \dots, J)$ — спільний вектор довжини черги мережі в момент часу t . Позначимо як $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ процес довжини спільної черги мережі Гордона — Ньюелла.

Теорема 2 [6, 8]. Позначимо як

$$S(I, J) = \{(n_1, \dots, n_J) \in \mathbb{N}^J: n_1 + \dots + n_J = I\}$$

простір станів процесу довжини спільної черги

$$\eta = (\eta_t: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S(I, J), \mathcal{P}(S(I, J)))) ; t \in \mathbb{R}_+$$

мережі Гордона — Ньюелла, означеного вище.

Тоді η — марковський процес з Q -матрицею $Q = (q(y, x): y, x \in S(I, J))$, заданою так: для $i, j \in V$ і $x = (n_1, \dots, n_J) \in S(I, J)$

$$\begin{aligned} q(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_J; n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_J) &= \\ &= \mu_i(n_i) r(i, j), \text{ якщо } n_i > 0, \\ i q(x, x) &= - \sum_{y \in S(I, J) - \{x\}} q(x, y), \\ q(x, y) &= 0, \text{ інакше.} \end{aligned}$$

η незвідний, консервативний, нескінченний (non-explosive) та ергодичний.

Нехай $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_J)$ позначає єдиний імовірнісний розв'язок рівняння руху $\eta = \eta R$.

Єдиним стаціонарним і граничним розподілом $\pi = \pi(I, J)$ процесу η на $S(I, J)$ є

$$\pi(I, J)(n_1, \dots, n_J) = G(I, J)^{-1} \prod_{j=1}^J \left\{ \prod_{k=1}^{n_j} \frac{\eta_j}{\mu_j(k)} \right\}$$

$$(n_1, \dots, n_J) \in S(I, J),$$

де $G(I, J)$ — нормуюча константа.

Зауваження 2. Означення мережі Гордона — Ньюелла стосується тільки множини вузлів, що представляють вузли базового графу. Для структурованого графу $\Gamma = (V, B)$ ребра

$$\{i, j\} \in B \Leftrightarrow [r(i, j) > 0 \vee r(j, i) > 0]. \quad (5)$$

визначаються через матрицю R маршрутизації клієнтів.

Хоча мережеві процеси діють у очевидному сенсі локально щодо цієї структури сусідства, ймовірності переходів вкладеного ланцюга стрибків не визначаються локально та не синхронізуються у сенсі (3) та (4). Це результат досить простого розвитку мережі, що дозволяє завершити лише одне обслуговування за один момент часу. Але можемо прямо узагальнити поведінку переходу у напрямку, що робить його більш відповідним властивості синхронізації (див. [3]).

Означення 6 [узагальнена мережа Гордона — Ньюелла]. Узагальнена мережа Гордона — Ньюелла — це мережа вузлів $\{1, 2, \dots, J\} := V$ із залежними від стану окремими серверами з означення 4. $I > 0$ клієнтів циркулюють згідно з незвідною матрицею Маркова $R = (r(i, j): i, j = 1, \dots, J)$ (див. означення 5).

Нехай η_j^t позначає кількість клієнтів, що перебувають у вузлі j в момент часу $t \geq 0$, що чекають чи обслуговуються (локальна довжина черги у вузлі j). Тоді $\eta^t := (\eta_j^t: j = 1, \dots, J)$ — спільний вектор довжини черги мережі в момент часу t . Позначимо $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ процес спільної довжини черги узагальненої мережі Гордона — Ньюелла.

Можна запропонувати декілька варіантів еволюції мережі в часі, якщо $\eta^t = (\eta_j^t: j = 1, \dots, J) = (n_1, \dots, n_J)$. Система залишається в цьому стані протягом часу, експоненціально розподіленого з параметром $\lambda(n_1, \dots, n_J) > 0$, $\lambda(\max_{i \in V} n_i) > 0$ або $\lambda(\frac{1}{J} \sum_{i \in V} n_i) > 0$. Якщо цей час утримання закінчується, то в кожному вузлі приймається рішення (для кожного вузла незалежно від історії мережі) щодо завершення (з імовірністю $\gamma(i) > 0$) поточного обслуговування (якщо таке є, тобто, якщо $n_i > 0$) або його продовження (з імовірністю $1 - \gamma(i) > 0$). Якщо термін обслуговування у вузлі i закінчується, то клієнт, що обслуговувався, при виході з вузла i з імовірністю $r(i, j) \geq 0$ обирає для переходу вузол j наступним, і потім негайно входить у вузол j для обслуговування, якщо сервер вільний; в іншому випадку він приєднується до хвоста черги вузла j . Якщо вузол відправлення i задано, рішення про маршрутизацію клієнта не залежить від історії мережі.

Зауваження 3. Звідси випливає, що η є незвідним, консервативним, нескінченним та ергодичним, тому існує єдиний стаціонарний і граничний розподіл.

У виробничому контексті рішення про те, завершено чи продовжено обслуговування (прийняття наприкінці часу затримки), можемо інтерпретувати як діяльність локальних контролерів, які перебувають у вузлах. α_j^n — це рішення контролера у вузлі j в момент n -го переходу процесу і вказує, чи був виробничий процес успішним (з імовірністю $\gamma(i) > 0$) чи ні (з імовірністю $1 - \gamma(i) > 0$).

Імовірність переходу вбудованого ланцюга стрибків тепер локальна, і за побудовою рішення про стрибок у вузлах приймаються завжди одночасно в один момент миттєво і паралельно, але легко бачити, що загалом властивість синхронізації, яка передбачає умовну незалежність переходів, виконується не повністю, оскільки в імовірностях переходу стрибків ланцюга містяться параметри часу затримки $\lambda(x)$.

З останнього зауваження випливає, що, хоча певною мірою узагальнена мережа Гордона — Ньюелла виглядає як марковське стрибкоподібне випадкове поле, воно таким не є.

Отже, тепер додатково опишемо техніку внесення змін із використанням розширеного простору станів, що робить розвиток системи в часі таким, що у формальному розумінні виконує властивості марковського стрибкоподібного випадкового поля. Як і в роботі [2], основна ідея полягає в тому, щоб включити для кожного вузла j до опису локального стану його локальну довжину черги n_j , значення рішення щодо того, чи в момент наступного стрибка системи закінчується поточне обслуговування ($=1$), чи продовжується принаймні ще один період ($=0$), а також напрямок маршруту (якщо такий є), який може виникнути після можливого виходу з вузла j у наступний момент стрибку.

Означення 7 [доповнена мережа Гордона — Ньюелла]. Узагальнена доповнена мережа Гордона — Ньюелла — це мережа вузлів $V := \{1, 2, \dots, J\}$ із залежними від стану окремими серверами з означен-

ня 4. $I > 0$ клієнтів циркулюють згідно з незвідною матрицею Маркова $R = (r(i, j): i, j = 1, \dots, J)$ (див. означення 5).

Основний граф маршрутизації подано в (5).

Нехай для моменту часу $t \geq 0$ $\eta_j^t = (v_j^t, \theta_j^t, q_j^t)$ позначає кількість v_j^t клієнтів у вузлі j , що очікують або обслуговуються (локальна довжина черги у вузлі j), рішення θ_j^t , що приймає в момент наступного стрибка споживач сервісу (якщо такий є) щодо того, чи покидати вузол j , і напрямом $q_j^t \in V$, в якому цей споживач потім прибуде. Рішення θ_j^t споживач приймає на підставі інформації про стан повного околу вузла $\tilde{N}(j)$. Тоді $\eta^t := ((v_j^t, \theta_j^t, q_j^t): j = 1, \dots, J)$ спільний вектор — довжини черги доповненої мережі у момент часу t . Позначимо як $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ спільний доповнений процес довжини черги доповненої узагальненої мережі Гордона — Ньюелла.

Еволюція в часі цієї мережі така: якщо

$$\eta^t = ((v_j^t, \theta_j^t, q_j^t): j = 1, \dots, J) \\ = (n_1, t_1, r_1; \dots; n_i, t_i, r_i; \dots; n_j, t_j, r_j; \dots; n_J, t_J, r_J),$$

то система залишається в цьому стані протягом часу, розподіленого експоненціально з параметром, наприклад, $\lambda(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_J) > 0$, $\lambda(\max_{i \in V} n_i) > 0$ або $\lambda(\frac{1}{J} \sum_{i \in V} n_i) > 0$. Протягом цього часу затримки особи, що приймають рішення у вузлах, визначають значення $\alpha_k^t \in \{0, 1\}$, $k \in V$, на підставі інформації про стан повного околу вузла $\tilde{N}(j)$.

Незалежно від історії мережі вирішується, чи є поточне обслуговування (якщо воно здійснюється, тобто, якщо $n_i > 0$) завершеним (з імовірністю $P(\alpha_i^t = 1/v_{\tilde{N}(i)}^t) = \gamma(\tilde{N}(i)) > 0$), чи ні (з імовірністю $P(\alpha_i^t = 0/v_{\tilde{N}(i)}^t) = 1 - \gamma(\tilde{N}(i)) > 0$) для всіх $i \in V$.

Якщо цей час затримки закінчується, то у кожному вузлі j довжина черги оновлюється відповідно до значень $\{(\eta_i^t, \theta_i^t, q_i^t) = (x_i, t_i, r_i): i \in \tilde{N}(j)\}$. Це дає v_j^{t+1} .

Тоді для кожного вузла j значення θ_j^t оновлюється до $\theta_j^{t+1} = \alpha_j^t$.

Насамкінець значення q_j^t скидається до $q_j^{t+1} = k$ з імовірністю $r(j, k) \geq 0$, де з урахуванням вузла відправлення j рішення про маршрутизацію клієнта приймається незалежно від історії мережі.

Наслідок. Вкладений ланцюг переходів процесу η доповненої узагальненої мережі Гордона — Ньюелла з означення 8 задовольняє властивість локальності (3) та властивість синхронізації (4) з означення 3, і тому це — марковське стрибкоподібне випадкове поле.

Крім того, ланцюг стрибків керованого мережевого процесу (η, α) задовольняє умову (5.24) з означення 5.40 роботи [2], і тому (η, α) є керованим випадковим стрибкоподібним марковським полем.

Доведення цілком аналогічне до доведення наслідку 5.30 в роботі [2].

3. Знаходження оптимальних стратегій керування доповненою мережею Гордона — Ньюелла

Простори локальних рішень $A_i = \{t^1, t^2, \dots, t^{n_i}\}$, $i = 1, \dots, J$, скінченні і не залежать від t . З [2, теорема 3.39] знаємо, що оптимальну стратегію Δ^* (згідно з асимптотично усередненими очікуваними витратами) можна знайти в класі детермінованих стаціонарних марковських стратегій, тобто $\Delta^* = (\Delta_i^*(x_{\tilde{N}(i)}): i = 1, 2, \dots, J)$. Тому далі розглянемо для моменту часу t і вузла j рішення $\Delta_j^t(x_{\tilde{N}(j)})$, тобто залежне тільки від станів свого околу. Звідси випливає, що наприкінці часового слота у вузлі j (якщо присутні h клієнтів) обслуговування клієнтів закінчується з імовірністю $p_j(h, u) \in (0, 1)$ і з імовірністю $q_j(h, u) := 1 - p_j(h, u)$ замовник залишиться там щонайменше ще один проміжок часу, $h \geq 1$, $u \in A_j$. Отже, отримуємо локальну марковську стратегію $\Delta = (\Delta_i: i = 1, 2, \dots, J)$ і керований процес (ξ, Δ) .

Для будь-якої детермінованої стратегії Δ , що призводить до ймовірності обслуговування $p_j(h, u) \in (0, 1)$ у вузлах, керований процес (ξ, Δ) ергодичний у просторі станів $S(I, J)$ з деяким стаціонарним розподілом $\pi^{I, J, \Delta} =: \pi^\Delta = (\pi^\Delta(x): x \in S(I, J))$. Витрати, що виникають протягом очікуваного часу перебування між стрибками t^n , якщо система перебуває у стані $\xi^t = x^t$ і приймається рішення u^t , становлять $r(x^t, u^t, t^n \geq 0)$. Для визначення оптимальної стратегії будемо використовувати процедуру покращення стратегії [5, розділ 6], яка полягає у такому.

Вибираємо довільну стратегію Δ і розглядаємо для деякої (невідомої) функції $v = (v(x): x \in S(I, J))$ рівняння [5, сс. 56, 66]

$$R_y^\Delta + v(y) = r(y, \Delta(y), t^n) + \sum_{x \in S(I, J)} Q(x | y, \Delta(y)) v(x), \quad y \in S(I, J),$$

$$\sum_{x \in S(I, J)} \pi^\Delta(x) v(x) = 0.$$

Розв'язок $\{(v(x), R_y^\Delta): x, y \in S(I, J)\}$ дає витрати R_y^Δ при використанні стратегії Δ , що виявляються незалежними від початкового стану y . Алгоритм удосконалення політики в [5, с. 70] полягає у такому.

Для кожного $y \in S(I, J)$ визначимо A^y як множину рішень a в стані y , для яких

$$\sum_{x \in S(I, J)} Q(x | y, a) R_x^\Delta < R_y^\Delta,$$

або, якщо таких рішень немає, множину рішень, що задовольняє

$$\sum_{x \in S(I, J)} Q(x | y, a) R_x^\Delta = R_y^\Delta$$

$$r(y, a, t^n) + \sum_{x \in S(I, J)} Q(x | y, a) v^\Delta(x) < r(y, \Delta(y), t^n) + \sum_{x \in S(I, J)} Q(x | y, \Delta(y)) v^\Delta(x) = R_y^\Delta + v^\Delta(y).$$

Починаючи із заданої стратегії Δ , визначимо деяку локальну стратегію Δ' , яка приймає деякі рішення $a \in A^y$ у принаймні одному стані y , для якого A^y непорожня; інакше приймається рішення згідно зі стратегією Δ .

Теорема 3 [5, с. 70, 71]. 1. Якщо $\Delta' \neq \Delta$, то $R_y^{\Delta'} \leq R_y^\Delta, y \in S(I, J)$.

2. Процедура вдосконалення стратегії призводить до оптимальної стратегії за обмежену кількість ітерацій. Якщо Δ' актуальна стратегія і якщо A^y порожня для всіх y , то актуальна політика оптимальна: $\Delta' =: \Delta^*$ і

$$R_x^{\Delta^*} = \rho(x, \Delta^*) = \inf_{\Delta} \rho(x, \Delta).$$

4. Висновки

У статті запропоновано модифікацію замкненої мережі Гордона — Ньюелла, яка враховує локальну та синхронну взаємодію вузлів системи масового обслуговування. Припускається, що у вузлах перебувають особи, що приймають рішення щодо обслуговування клієнтів на підставі інформації про стан сусідніх вузлів. Критерій керування — усереднені витрати (доходи) в одиницю часу. Для таким чином доповненої мережі Гордона — Ньюелла пропонується процедура знаходження оптимальної детермінованої стратегії керування.

Список літератури

1. Cantaluppi L. Optimality of piecewise-constant policies in semi-Markov decision chains / L. Cantaluppi // *SIAM Journal of Control and Optimization*. — 1984. — Vol. 22. — Pp. 723–739.
2. Chorney R. K. Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications / R. K. Chorney, H. Daduna, P. S. Knopov. — New York : Springer Science + Business Media, Inc., 2006.
3. Daduna H. Controlled semi-markov fields with graph-structured compact state space / H. Daduna, P. S. Knopov, R. K. Chorney // *Teor. Ymovirnost. Matem. Statist.* — 2003. — Vol. 69. — Pp. 38–51. English translation in: *Controlled semi-Markov fields with graph-structured compact state space. Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 69: 39–53, 2004.
4. Daduna H. Stochastic networks with product form equilibrium // *Stochastic Processes: Theory and Methods* / ed. by D. N. Shanbhag, C. R. Rao. — Amsterdam : Elsevier Science, 2001. — Vol. 19 of *Handbook of Statistics*. — Pp. 309–364.
5. Derman C. *Finite State Markovian Decision Processes* / C. Derman. — New York, London : Academic Press, 1970.
6. Gordon W. J. Closed queueing networks with exponential servers / W. J. Gordon, G. F. Newell // *Operations Research*. — 1967. — Vol. 15. — Pp. 254–265.
7. Howard R. A. Research in semi-Markov decision structures / R. A. Howard // *Journal of the Operational Research Society of Japan*. — 1964. — Vol. 6. — Pp. 163–199.
8. Jackson J. R. Jobshop-like queueing systems / J. R. Jackson // *Management Science*. — 1963. — Vol. 10. — Pp. 131–142.
9. Jewell W. S. Markov renewal programming. I. Formulation, finite return models / W. S. Jewell // *Operations Research*. — 1963. — Vol. 11. — Pp. 938–948.
10. Jewell W. S. Markov renewal programming. II. Infinite return models, example / W. S. Jewell // *Operations Research*. — 1963. — Vol. 11. — Pp. 948–971.
11. Kelly F. P. *Reversibility and Stochastic Networks* / F. P. Kelly. — Chichester — New York — Brisbane — Toronto : John Wiley and Sons, 1979.
12. Kitaev M. Elimination of randomization in semi-Markov decision models with average cost criterion / M. Kitaev // *Optimization*. — 1987. — Vol. 18 (3). — Pp. 439–446.
13. Kitaev M. Y. *Controlled Queueing Systems* / M. Y. Kitaev, V. V. Rykov. — Boca Raton : CRC Press, 1995.
14. Luque Vasquez F. Controlled semi-Markov models with discounted unbounded costs / Vasquez F. Luque, Alcaraz M. T. Robles // *Bol. Soc. Math. Mex.* — 1994. — Vol. 39 (1–2). — Pp. 51–68.
15. Vega-Amaya O. Average optimality in semi-Markov control models on Borel spaces: unbounded cost and controls / O. Vega-Amaya // *Bol. Soc. Math. Mex.* — 1993. — Vol. 38 (1–2). — Pp. 47–60.
16. Wakuta K. Arbitrary state semi-Markov decision processes with unbounded rewards / K. Wakuta // *Optimization*. — 1987. — Vol. 18 (3). — Pp. 447–454.
17. Yushkevich A. A. On homogeneous markov model with continuous time and finite or countable state space / A. A. Yushkevich, E. A. Fainberg // *Theor. Veroyatnost. Primen.* — 1979. — Vol. 24 (1). — Pp. 155–160. English translation in: *On homogeneous Markov model with continuous time and finite or countable state space. Theory Probab. Appl.*, 24 (1): 156–161, 1979.

References

- Cantaluppi, L. (1984). Optimality of piecewise-constant policies in semi-Markov decision chains. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 22, 723–739.
- Chorney, R. K., Daduna, H. & Knopov, P. S. (2006). *Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications*. Springer Science + Business Media, Inc., New York.
- Daduna, H., Knopov, P. S. & Chorney, R. K. (2003). Controlled semi-markov fields with graph-structured compact state space. *Teor. Ymovirnost. Matem. Statist.*, 69, 38–51 [in Ukrainian]. English translation in: Daduna, H., Knopov, P. S. & Chorney, R. K. (2004). Controlled semi-Markov fields with graph-structured compact state space. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 69, 39–53.
- Daduna, H. (2001). Stochastic networks with product form equilibrium. *Stochastic Processes: Theory and Methods*, 19, 309–364.
- Derman, C. (1970). *Finite State Markovian Decision Processes*. Academic Press, New York, London.
- Gordon, W. J. & Newell, G. F. (1967). Closed queueing networks with exponential servers. *Operations Research*, 15, 254–265.
- Howard, R. A. (1964). Research in semi-Markov decision structures. *Journal of the Operational Research Society of Japan*, 6, 163–199.
- Jackson, J. R. (1963). Jobshop-like queueing systems. *Management Science*, 10, 131–142.
- Jewell, W. S. (1963a). Markov renewal programming. I. Formulation, finite return models. *Operations Research*, 11, 938–948.
- Jewell, W. S. (1963b). Markov renewal programming. II. Infinite return models, example. *Operations Research*, 11, 948–971.
- Kelly, F. P. (1979). *Reversibility and Stochastic Networks*. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto.
- Kitaev, M. (1987). Elimination of randomization in semi-Markov decision models with average cost criterion. *Optimization*, 18 (3), 439–446.
- Kitaev, M. Y. & Rykov, V. V. (1995). *Controlled Queueing Systems*. CRC Press, Boca Raton.
- Luque, Vasquez F. & Robles, Alcaraz M. T. (1994). Controlled semi-Markov models with discounted unbounded costs. *Bol. Soc. Math. Mex.*, 39 (1–2), 51–68.
- Vega-Amaya, O. (1993). Average optimality in semi-Markov control models on Borel spaces: unbounded cost and controls. *Bol. Soc. Math. Mex.*, 38 (1–2), 47–60.
- Wakuta, K. (1987). Arbitrary state semi-Markov decision processes with unbounded rewards. *Optimization*, 18 (3), 447–454.
- Yushkevich, A. A. & Fainberg E. A. (1979). On homogeneous markov model with continuous time and finite or countable state space. *Theor. Veroyatnost. Primen.*, 24 (1), 155–160 [in Russian]. English translation in: Yushkevich, A. A. & Fainberg E. A. (1979). On homogeneous Markov model with continuous time and finite or countable state space. *Theory Probab. Appl.*, 24 (1), 156–161.

R. Chornei

LOCAL CONTROL IN GORDON-NEWELL NETWORKS

We examine continuous-time stochastic processes with a general compact state space, which is organized by a fundamental graph defining a neighborhood structure of states. These neighborhoods establish local interactions among the coordinates of the spatial process. At any given moment, the random state of the system, as described by the stochastic process, forms a random field concerning the neighborhood graph.

The process is assumed to have a semi-Markov temporal property, and its transition kernels exhibit a spatial Markov property relative to the basic graph. Additionally, a local control structure is introduced to optimize the evolution of the system over time. Here, optimality is defined in terms of the criterion of asymptotic average reward over time. Only discrete stepwise control is considered, meaning decisions are made exclusively at process jump moments. As is customary, random policies are represented by a conditionally independent structure. It is also assumed that this structure exists within the transition kernels of jump-like chains (synchronized kernels). The controlled random fields described, featuring local and synchronous component interactions, are applied to queueing systems—specifically, to the extended and generalized closed Gordon-Newell network. The modification primarily involves synchronizing customer service times at nodes. Based on the queue length at the node and its vicinity, a decision is made regarding serving the customer. If service is provided, a decision is also made regarding the customer's next direction. Consequently, the enhanced Gordon-Newell network satisfies the conditions for synchronous and local system node interactions. A procedure is outlined for determining optimal non-randomized control strategies in the enhanced Gordon-Newell network.

Keywords: Gordon-Newell network, local and synchronous interaction, controlled stochastic processes, decision-making processes.

Матеріал надійшов 17.12.2024



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)